هو الله
فارسی اقدس
مقالهٔ اوّل
طبع فی مطبع
ناصری
بمبئی
۱۳۲۴

بسم الله الرحمن الرحیم

حمد و ستایش و تقدیس و نیایش فزون از اندازه حکیم صانع مهندسی را سزاست
که بکلک قدرت نظام قوام هیئت موجودات باشکال مختلفهٔ هندسیه
و صور متنوعهٔ بدیعه بر سطح عالم ایجاد و الواح کائنات مرتسم و منتظم فرمود
و جمیع را بخلعت گرامی بدائع علوم و حکم و ظهورات صنائع و فنون در عالم
مزین نمود تا تجلیات حقائق حکمیه و دقائق کمالات ذاتیه از حقیقت
انسانیه ظاهر شود و شقائق فوائد و قواعد صنعیه از حدائق افکار نفوس
زکیه بقدرت کامله چون ازهار ها از بوستان ارض بوجود چهره نمایند
جلت قدرته و جمت نعمته و تعالت ثاره و کملت صنعه و احاطت افضاله
علی من فی السموات و الارضین **اما بعد** چنین گوید بندهٔ رب صمد
علی محمد کشمیری که بر ضمیر ارباب علم و دانش و خاطر خطیر اصحاب خرد
و بینش پوشیده نیست که (اقلیدس) یعنی علم هندسه کلید خزائن

علوم و حِکَم و گنجینهٔ طُرق ترقیات اهل تمدّن و مایهٔ آسایش اُمم عالمست)

هرگاه علم هندسه ضمیمهٔ تعلیمات نبودی این همه مقاصد عظیمهٔ انسانی در پردهٔ خفا
مستور و محجوب ماندی و اهل جهان از فوائد آن بیخبر و نتایج افکار دقیقهٔ انسانی بحر
و غیر مُنتج بودی)

مثلاً هرگاه علم هندسه نمی بود علم هیئت و علم مساحت و جغرافی و نیز بسیاری
از علوم مُفیدهٔ عالیه که هیئتشناسان بران محتاجند تکمیل نمییافت چنانچه
حضرت مولی الموالی در دبستان جهان چنین نُطق فرموده (المهندسة للبنیان)
از اینجاست که ارباب علم و حکمت گفته اند مادامیکه از علم هندسه اطلاع
و آگاهی نباشد بهرهٔ کافی از علوم مذکوره با سرها حاصل نشود و بنیاد تحصیل تمدن
در عالم ایجاد مُستحکم و مُتقن نگردد)

این مختصر گنجایش اینقدر ندارد که فوائد کثیرهٔ این علم شریف را برشمارم)
هرچند برای انحلال دقائق اشکال اقلیدس افکار غیرصفا مکفی نباشد ولکن
اساتید حکما و مُهندسین قائل برآنند که خود علم اقلیدس برای قوای عقلیه مینا و ورزشی
قوی است لهذا هرگاه طالب العلم بدقیقهٔ از دقائق که حل آن بنظرش
دشوار آید برخورد خود را نبازد بلکه تعمق نماید چه تعمق در مطالب جهت
حل دقائق علیه معلی است که ما فوق آن مُتصور نبوده و نیست)

مثلاً هرگاه از صدمه حل این علم یا سائر علوم مرحلهٔ از تدریس مُعلم شفیق
طی شود قطعاً باقی مراحل از تعمق طی و منحل خواهد بود)

خوشا زمانیکه در مدارس ما هردم چنانچه در اقوام متمدنهٔ عالم متداول است

در ابتدای تعلیم درس و تدریس اقلیدس جاری و مرسوم گردد

اقلیدس نام حکیمی است معروف و از تجدید مستغنی گویند مولدش شهر (صور) که موضعی است بر ساحل بحر شام (یا بحر اوسط) ولکن بتحقیق رسیده که مدارج کمالات علیه را در مدینهٔ (اسکندریه) طی نمود و یکی از تلامذهٔ طبقهٔ افلاطونی بوده - سیصد و چند سال پیش از ظهور حضرت مسیح افادهٔ علوم را بخلق میفرموده - مصنفاتش بسیار منجمله در علم هندسه پانزده مقاله تحریر فرموده است

هرچند بعضی برانند که مصنف سیزده مقاله اول (حکیم ابلونیوس) بوده است علی ای حال اقلیدس حکیم علم هندسه را چنان ترتیب داده و تدوین نموده که بنام نامیش موسوم بحدیکه میان ارباب علوم و کمالات اقلیدس و علم هندسه بیک معنی مصطلح گردید

شکل

اشکال را باعتبار نتائج دو نوع قرار داده قسمی را عملی و قسم دیگر را اثباتی نامیده است

مثلاً در مقالهٔ اول شکل ۱ — ۲ — ۳ — ۹ — ۱۰ — ۱۱ — ۱۲ — ۲۲ — ۲۳ — ۳۱ — ۴۲ — ۴۴ — ۴۵ — ۴۶ — این چهارده شکل عملی و باقی را اثباتی نامیده است

امتیاز میان این دو قسم غیر از این نباشد که در هر شکل پارهٔ معلومات و از آن معلومات اصول تازه که متعلق بخود آن شکل است دستگیر میشود

هرگاه این اصول که از معلومات شکل معلوم فیه مذکور شده است اشاره نماید بسوی عمل بیان آن شکل را عملی گویند))

وهرگاه اصول مذکوره مبنی باشد بر مطلبی که در بحث شکل معلومه مقصود است آنرا شکل اثباتی گویند))

مثلاً در مقالهٔ اوّل شکل اوّل اصول ارتسام مثلث متساوی الاضلاع را می نماید))

ایضاً در مقالهٔ اوّل شکل دوم قاعدهٔ بدست میدهد که از نقطهٔ معلوم خطی مساوی با خط مفروض خارج نمائیم))

ایضاً در مقالهٔ اوّل شکل سوم اصول انقطاع مقدار خط اقصر از خط اطول یاد میدهد این اشکال را عملی خوانده است))

وامّا شکل اثباتی =

مثلاً در مقالهٔ اوّل شکل چهارم اصولی بدست میدهد یعنی ثابت میکند که هرگاه دو ضلع مثلثی با دو ضلع مثلث دیگری مساوی باشد (به تفصیلی که در بحث آن شکل مذکور است)) پس دو ضلع باقی هم از هر دو مثلث متساوی خواهند بود))

ایضاً در مقالهٔ اوّل شکل پنجم ثابت میکند که زوایای فوق قاعدهٔ مثلث متساوی الساقین (به تفصیلی که در بحث مذکور است)) باهم متساویند لهذا این طور اشکال را (اثباتی) گفته است))

اقلیدس پیش از تبیین مقالات جهت تفهیم مطالب هندسیه
قواعد و اصطلاحاتی چند که مراد از آنها حدود — علوم متعارفه و
اصول موضوعه باشد و در مقالة المحتاج الیه است قرار داده و تسلیم نموده
که حفظ آن برای طالب علم انفع باشد و استفهام مقاصد اسهل ہے۔
از این اصول انواع مضامین که در مقالات ذکر شود دریافت کردد

حدود

(۱) نقطه آن است که اجزا نداشته باشد یعنی مقدار نداشته باشد

(۲) خط فقط طول دارد بغیر عرض

هرچند نقطه و خط که مادہ باشد بے مقدار و بے عرض ناممکن ولکن در اقلیدس منظور اینست
که ملحوظ نباشد یعنی نقطهٔ هندسیہ مقام دارد و مقدار ندارد) ہے۔
کذلک خط هندسیہ در عرض مقام دارد نہ مقدار یعنی عرض ندارد) ہے۔
مثلاً فرض کن در پارچہ سفیدی گل سبزی واقع شده است پس آن حدیکہ فاصل است
میان سفیدی و سبزی همان است خط هندسی که فضائی را یعنی چیزی را احاطہ نکرده است

چہ هرگاه چیزی را یعنی سطحی را در آن داریم سفیدی قابض باشد هر اینه ممکن است از آن نقطہ
هرچیز ریزه تر یا بخطی باریک تر از تار عنکبوت محدود و معین سازیم و حال آنکہ ناممکن است فرضاً
هرگاه آن حد را که فارق سفیدی و سبزی است بنقاط بسیار ریزه معین سازیم
مسلّم است خط منقوطہ مذکوره از دو حال بیرون نخواهد بود
یا بر سطح سفیدی واقع شود و یا اینکہ بر سطح سبزی) ہے۔
در صورت اول جزو سطح سفیدی خواهد بود و در شق ثانی از اجزاء گل سبز محسوب) ہے۔
از این وضاحت منتج شود که خط هندسی مقام دارد ولکن مقدار ندارد) ہے۔
همین ثبوت برای نقطهٔ هندسیہ هم کافی است که آنهم مقام دارد نہ مقدار) ہے۔
زیرا که اجزاء هر خط مرکب از نقاط است پس هرگاه مقداری یعنی جسمی برای نقطہ منظور
باشد همان مقدار مسلسل برای خط هم باقی خواهد بود و حال آنکہ مذکور شد
خط هندسیہ عرض ندارد فلهذا برای جزو آنهم که نقطهٔ هندسیہ باشد مقدار
نیست) ہے۔

(۳) خط منتهی بنقطہ میشود و آن نقطہ را طرف گویند

(۴) خط مستقیم آن خط را گویند که در نقاط اطراف خود [illegible]

پست وبلند نباشد

خط دو نوع است مستقیم ومنحنی = مستقیم آنست که چون از نقطهٔ ابتدائیهٔ خود متحرک وممتد شود سمت خود را تغییر ندهد چنانچه تعریف شد —
خط منحنی آنست که چون از نقطهٔ ابتدائیهٔ خود متحرک وممتد شود پیهم از سمت خود انحراف نماید مثلاً خط محیط دائره منحنی است

(۵) سطح آن بسیط را نامند که طول وعرض هردو داشته باشد)۔

(۶) سطح منتهی بخط میشود که آن را (طرف سطح) گویند

(۷) سطح مستوی آنست که هرگاه در آن دو نقطه یعنی ه و م تعیین شود وآن دو نقطه را بخط مستقیمی وصل دهند خط مذکور بالتمام در آن سطح واقع شود)۔

(مثلاً سطح دائره وسطح مربع وامثال آن سطوح مستوی‌اند)۔

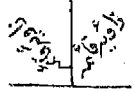
(۸) زاویه عبارت از تمائل دو خط است که بر یک نقطه متمائل شوند ودر یک جهت نباشند)۔

(۹) زاویهٔ مسطحهٔ مستقیمة الخطین عبارت از تمائل دو خط مستقیم است که در یک نقطه متمائل شوند ودر یک جهت نباشند

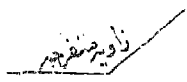
در دو فقرهٔ مذکوره یعنی هشتم ونهم تعریف زاویه شده فرق فیما بین هردو اینست که در فقرهٔ هشتم مطلق زاویه را تعریف نموده قید خطوط مستقیمه ندارد چه ممکن است از متمائل شدن دو خط منحنی یا یکی منحنی ودیگری مستقیم زاویه تشکیل یابد)۔
(قاعدهٔ زاویهٔ فقرهٔ نهم قید استقامت خطین است ودر اقلیدس بحث همین زاویه میباشد لهذا جهت اختصار بجای زاویهٔ مسطحهٔ مستقیمة الخطین تنها لفظ زاویه کافی خواهد بود)۔
واما اینکه در یک جهت نباشند مراد اینست که تمائل خطین این قسم (— —) نباشد چه در این صورت پس از اتصال خطین زاویه متشکل نگردد بلکه خطی نامیده خواهد شد)۔
زاویه را بسه حرف موسوم سازند یعنی یک حرف را بر راس زاویه ودو حرف دیگر را بر دو ساق آن نویسند وچون خواهند تعریف آن زاویه نمایند حرف راس زاویه را میانهٔ دو حرف معلوم نویسند
مثلاً زاویه (ج ا د) یعنی زاویه که از تمائل خط (ج ا) و (د ا) تشکیل یافته
ایضاً زاویه (د ا ب) یعنی زاویه که از تمائل خط (د ا) و (ب ا) متشکل شده است
ایضاً زاویه (ج ا ب) یعنی زاویه که از اتصال خط (ج ا) و (ب ا) متشکل شده است

هرگاه هر زاویه به سه حرف موسوم نمیشد در تفهیم مطالب دقت بهم میرسید و زاویهٔ مطلوب درمیان زوایا غیر معلوم می ماند۔
گاه باشد که قرائن شاهد حال است اکتفا به یک حرف نمایند۔
مثلاً زاویهٔ س ۔

(۱۰) زاویهٔ قائمه ـــ چون بر خطِ مستقیم خطِ مستقیم دیگر قائم شود چنین که در هر دو جانب خود دو زاویهٔ متساویه تشکیل دهد هر یکی از این دو زاویه را زاویهٔ قائمه نامند و آن خطِ مستقیم را که بر مستقیم دیگر قائم شده است عمود گویند۔

زاویهٔ قائمه — زاویهٔ قائمه

گاه به جهت اختصار لفظ زاویه را ساقط و اکتفا به لفظ قائمه کنند۔

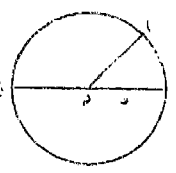
(۱۱) زاویهٔ که نسبت به قائمه فرجه اش بیشتر باشد یعنی اوسع باشد آنرا زاویهٔ منفرجه گویند۔

زاویهٔ منفرجه

(۱۲) زاویهٔ که نسبت به قائمه فرجه اش کمتر باشد آنرا زاویهٔ حادّه گویند۔

زاویهٔ حادّه

(۱۳) حد = یعنی طرف که انتهای هر چیز باشد۔

(۱۴) شکل = آنست که به یک خط یا خطوط متعدده محصور باشد۔

هرگاه از اتصال دو خط در یک نقطه زاویه متشکل گردد و در دو طرف دیگر موصول نباشد آنرا شکل نتوان گفت زیرا که سطحی را احاطه نکرده است۔

(۱۵) دائره = آن شکل مسطح را گویند که به یک خط که آنرا محیط نامند محدود باشد درمیان نقطه باشد که از آن نقطه هر قدر خطوط به محیط ممتد شود بالتمام متساوی المقدار باشند۔

ج ب د

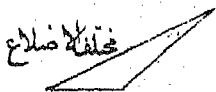
(٢٣) کثیر الاضلاع = آن شکل را گویند که زیاده از چهار خط آنرا احاطه نموده باشند

(اقسام مثلث باعتبار اضلاع سه قسم است)

متساوی الاضلاع

(٢٤) مثلث متساوی الاضلاع آنست که سه ضلع آن باهم متساوی باشند

متساوی الساقین

(٢٥) مثلث متساوی الساقین آنست که دو ضلع آن باهم متساوی باشند

مختلف الاضلاع

(٢٦) مثلث مختلف الاضلاع آنست که هر سه ضلع آن باهم متساوی نباشند

(باعتبار زوایا نیز مثلث بر سه قسم است)

مثلث قائم الزاویه

(٢٧) مثلث قائم الزاویه آنست که یک زاویهٔ آن قائمه باشد

منفرجه

(٢٨) مثلث منفرج الزاویه آنست که یک زاویهٔ آن منفرجه باشد

حادّه

(٢٩) مثلث حادّ الزوایا آنست که زوایهای آن حادّه باشند

مثلثی که یک زاویهٔ آن قائمه باشد و نیز مثلثی که یک زاویهٔ آن منفرجه باشد باقی دو زاویه از هر مثلث حادّه خواهند بود

بنابراین باید هر مثلثی لابد دو زاویهٔ حادّه داشته باشد

هر ضلع مثلث را قاعده توان گفت در اینصورت زاویهٔ که مقابل قاعده باشد رأس مثلث است

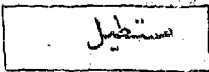
ضلع اقصر مثلث متساوی الساقین را غالباً قاعده گویند

در مثلث قائم الزاویه دو خط مستقیمی که تشکیل زاویهٔ قائمه نموده اند هر یکی را از خطین

قاعده و ثانی را عمود گویند)

وخط مستقیمیکه مقابل قائمه میباشد وتر خوانند)

(باعتبار اضلاع و زوایا اشکال چهار گوشه پنج قسم است)

(٣٠) مربع آن شکل چهار گوشه را گویند که اضلاع آن باهم متساوی باشد وزاویه‌ای آن قائمه باشد

مستطیل

(٣١) مستطیل یا قائم الزاویه آن شکل چهار گوشه را گویند که زاویه‌ای آن قائمه باشد ولکن اضلاع آن باهم متساوی نباشند)

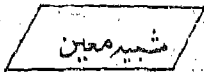
(اکثر مستطیل را قائم الزاویه گویند)

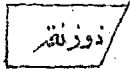
(ذوات الاضلاع که اضلاع متقابله آن متساوی و از زوایا یکی قائمه باشد قطعاً باقی زوایای آن قائمه خواهند بود)

معین

(٣٢) معین = آن شکل چهار گوشه را گویند که چهار ضلع آن متساوی باشند لکن زوایای آن قائمه نباشد

شبیه معین

(٣٣) متوازی الاضلاع (شبه معین) آن شکل چهار گوشه را گویند که دو ضلع متقابل آن باهم متساوی باشند امّا زاویه‌ای آن قائمه نباشد)

ذوزنقه

(٣٤) ذوزنقه = آن شکل چهار گوشه را گویند که دو ضلع آن متوازی باشد و دو ضلع دیگر متوازی نباشند)

اشکال چهار گوشه که اضلاع متقابله آن متوازی و غیر متساوی باشند آن اشکال را منحرف نامند)

(٣٥) خطوط مستقیم متوازی = آن دو خط را گویند که اگر دو طرف خود با استقامت هر قدر ممتد شوند باهم اتصال و تقاطع ننمایند

قید استقامت خطوط از اینجاست که جادهٔ کالسکهٔ دخانیه (ریلوی) که دو خط آهن میباشند با هم متوازیند اما نه مستقیم یعنی در جمیع نقاط ممتدهٔ خود در تباعد از همدیگر متساوی و متوازیند چه هرگاه چنین نباشد عبور کالسکه از روی آن متعذر و ناممکن است ولکن در همهٔ نقاط ممتدهٔ خود مستقیم نباشند)
هرگاه دو دائره یا بیشتر باین صفت باشند یعنی متحد المرکز و سطوح آنها غیر متساوی باشند پس خطوط محیط آنها متوازی غیر مستقیم میباشند)

اصول موضوعه

(یعنی مطالبیکه فرض نموده بآن عمل نمائیم)

فرض کن که ما اختیار داریم =

(۱) از هر نقطه که بخواهیم تا نقطهٔ دیگر خط مستقیم خارج نمائیم)
(۲) خط مستقیم محدودی را باستقامت تا هرجا که خواهیم ممتد سازیم)
(۳) از مرکز تا هر فاصله که خواهیم دائره رسم نمائیم)

علوم متعارفه

(یعنی مطالبیکه بدیهیه باشد — در تصدیق آن تامل نباشد و لزوم استنباط از خارج نباشد)

(۱) چیزهائیکه بیک چیز مساویند آن چیزها باهم متساوی میباشند
(مثلاً فرض کن خط (ا) مساوی خط (ب) و خط (ب) مساوی خط (ج) پس خط (ا) مساوی خط (ج) خواهد بود)

(۲) هرگاه بر چیزهای متساوی افزوده شود چیزهای متساوی حاصل آنها نیز متساوی خواهد بود)
مثلاً فرض کن (ا) و (ب) باهم متساویند افزودیم بر (ا) مقدار (ج) را پس (اج) مساوی (ب ج) خواهد بود

(۳) هرگاه از چیزهای متساوی کشیده شود چیزهای متساوی آنچه باقی

ماند نیز متساوی خواهند بود)

(۴) هرگاه بچیزهای غیر متساوی افزوده شود چیزهای متساوی بعد از افزایش هم غیر متساوی خواهند بود)

(۵) هرگاه از چیزهای غیر متساوی کشیده شود چیزهای متساوی پس از انتزاع حاصل آن غیر متساوی خواهد بود)

(۶) چیزهائیکه نسبت بچیزی دو چند باشند آن چیزها باهم متساوی میباشند

(۷) چیزهائیکه نسبت بچیزی نصف باشند آن چیزها باهم متساویند)

(مثلاً پانصد دینار نصف هزار دینار است لهذا پانصد دینار باهم متساویند)

(۸) مقادیریکه بریکدیگر منطبق شوند یعنی یک سطح را احاطه نمایند باهم متساویند

(مراد اینست هر دو شکل مثلاً مثلثی را بدون اینکه خللی در آن درست اندازه شود بر مثلث دیگر قائم کنیم پس هرگاه اضلاع و زوایای هر دو مثلث یک سطح را احاطه نماید متساوی خواهند بود این عمل را انطباق نامند)

(گاه باشد که باعتبار مقادیر هر دو شکل باهم متساوی باشند اما منطبق نشوند مثلاً مربعی که ضلع آن یک ذرع باشد مساوی است با مستطیلی که طول آن دو ذرع و عرض آن نیم ذرع باشد ولکن عمل انطباق واقع نشود)

(۹) کل از جزو خود زیاد است)

(۱۰) دو خط مستقیم سطحی را احاطه نکنند)

(۱۱) تمام زوایای قائمه باهم متساویند)

(هر زاویه قائمه نود درجه میباشد اما در زوایای دیگر یعنی منفرجه و حاده چنین قیدی نیست متفاوت باشند مگر اینکه در مثلث متساوی الاضلاع هر یکی از زوایای ثلاثه آن شصت درجه میباشد و مجموع هر سه زاویه یکصد و هشتاد درجه است) و کذلک در مثلث متساوی الساقین قائم الزاویه هر یکی از دو زاویه آن چهل و پنج درجه میباشد که مجموع هر سه زاویه صد و هشتاد درجه بوده باشد)

(۱۲) هرگاه بر دو خط مستقیم خط مستقیمی واقع شود و دو زاویه داخله

یک جانب خود را کمتر از دو قائمه تشکیل نماید
پس هرگاه آن دو خط بی هم امتداد پیدا کنند
در آخر از آن سمتی که تشکیل دو زاویه کمتر از
دو قائمه نموده اند در یک جا باهم وصل و متقاطع خواهند شد)۔
(مراد اینست خطوط مستقیمہ که بصفتِ مذکوره اند متوازی نباشند)

این مقاله در سه فصل منقسم است
در فصل اوّل از شکلِ اوّل تا شکلِ (۲۶) خواصِ مثلّثات را بلحاظ اضلاع و مساوات (از حیث انطباق) و غیر مساواتِ زوایا بیان شده است)۔
در فصل دوّم از شکلِ (۲۷) تا شکلِ (۳۴) از خواصِ خطوطِ متوازیه و متوازی الاضلاع بحث شده است)
در فصل سوّم از شکل (۳۵) تا شکل (۴۸) مساوات متوازی الاضلاع مع مثلّثات بلحاظ سطوح (یعنی نه از حیثِ انطباق)۔ و ثبوت مساواتِ مربع عموری و قاعده مثلثِ قائم الزاویه مع مربع وتر ذکر شده است)۔
در این مقاله جهت توضیح علائم اشکال این حروف استعمال شود)۔
(آ بَ جَ دَ سَ صَ طَ عَ قَ لَ مَ یَ ۔ یعنی ابجد سعفص قلمی)۔
و هنگام لزوم نیز صفر (٥) یعنی حلقه میان خالی بکار برده آید)۔

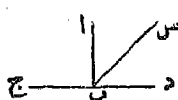
سؤالات متعلق با اصول علم هندسه

(۱) نقطه را چه قسم تعریف کنند ۔ چه چیز است در آن و چه چیز در آن نیست
(۲) هرگاه نقاطِ هندسیّه را علی الاتصال در یک قطار جا دهند آیا از آنها خط مستقیم پیدا خواهد شد ۔ و هرگاه میشود چه قسم خواهد بود
(۳) خارج کن دو خط را قسمیکه برد و نقطه تقاطع نمایند ۔ و آیا ممکن است اخراج دو خطِ مستقیم که بر دو نقطه متقاطع باشند
(۴) خط مستقیم را (اقلیدس) چه قسم تعریف نموده است)۔
(۵) هرگاه خطوط مستقیمهٔ هندسیه را علی الاتصال در قرب همدیگر دهند

آیا از آنها سطحِ متشکّل خواهد شد یا نه — هرگاه میشود وجه آن چیست

(۶) هرگاه در سطح مستوی دو نقطه را معیّن نموده بخط مستقیمی وصل نمائیم آن خطِ مستقیم در کجا واقع بشود
هرگاه خطّ مستقیمِ مذکور امتداد پیدا کند مقدار ممتدّ آن کجا واقع خواهد شد)ـ

(۷) بر نقطۂ (د) سه خط مستقیم یعنی (دا) و (د ب) و (دج) موصول میشوند ــ
بیان کن زوایاے ثلاثه را که از آنها متشکّل شده اند یعنی درمیان (د ا) و (د ب) و درمیان (د ب) و (د ج) و درمیان (د ج) و (د ا)
و آن قسمیکه زاویه (ا) را توان تعریف نمود بیان کن و نیز در صورتیکه زاویۂ (ا د ب) و (ب د ج) را جمع کنیم از آنها کدام زاویه متشکّل خواهد شد)ـ

(۸) در این شکل اسم دو زاویۂ قائمه و دو زاویۂ منفرجه را بیان کن)ـ

(۹) آیا کافی خواهد بود یا در تعریفِ خطوطِ متوازیه صرف همین فقره کنیم که آنها از دو طرف هر قدر امتداد پیدا کنند باهم وصل نشوند

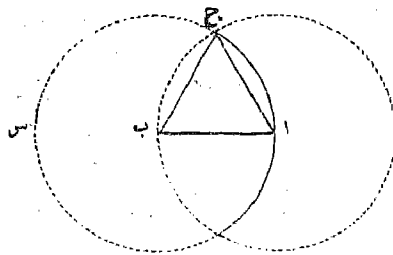
(۱۰) برای احاطه نمودنِ سطحی چند خط اقلاً لازم باشد — (در این باب جواب ابکو)

(۱۱) چه امتیاز است میانِ لفظِ محیط و دائره)ـ

(۱۲) هرگاه نقطه در دائره واقع شود ثابت کن که فاصلۂ آن از مرکز کمتر از نیم قطر خواهد بود

از آلات هندسه استعمال مسطر (خط کش) و پرکار را اقلیدس جائز داده
ولکن بمحلّ لزوم و الّا هرگاه بر هر مورد که استعمال آن روا باشد
پس از جهت یکی اثبات پاره از اشکال فضول بود تیجا بر محل خود معلوم کرده

شکل اول عملی

بر خط مستقیم مفروض بنا مثلث متساوی الاضلاع

فرض کن (اب) خط مستقیم مفروض

ومقصود اینست که بر خط (اب) مثلث متساوی الاضلاع مرتسم گردد

وضع شکل = (بحکم اصول ۳) از مرکز (ا) بفاصلهٔ (اب)
بنا دائرهٔ (بجد) را و از مرکز (ب) بفاصلهٔ (با) بنا دائرهٔ
(اجس) را (بحکم اصول ۱) از نقطهٔ (ج) که محل تقاطع دائرتین است
خارج کن خط مستقیم (جا) و (جب) را
پس (ابج) مثلث متساوی الاضلاع خواهد بود۔

ثبوت = چونکه (ا) مرکز دائرهٔ (بجد) است
لهذا (بحکم حد ۱۵) (اب) و (اج) باهم متساوی اند۔

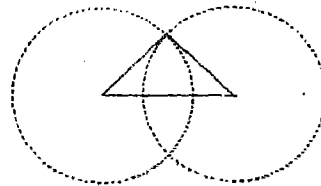
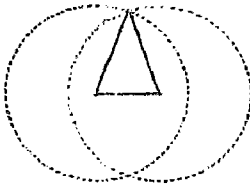
ایضاً چونکه ب مرکز دائرهٔ (اج س) است

لهذا (ب ج) و (ب ا) باهم متساوی میباشند۔

واما در فوق ثابت شد که (اج) و (ا ب) باهم متساویند

وچونکه (بحکم علوم ۱) چیزهائیکه بیک چیز مساویند آن چیزها باهم متساویند

بنابراین (اج) و (ج ب) و (ب ا) باهم متساوی میباشند۔

لهذا مثلث متساوی الاضلاع مرتسم گردید و مراد همین بوده۔

تفهیم

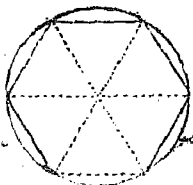
(۱) هر مثلث متساوی الاضلاع متساوی الزوایا میباشد۔

(۲) محیط دو دائره متساویه =

(اوّل) هرگاه بر مرکز همدیگر بگذرند پس مثلث مرتسمه بر مرکزین و مماس بنقطهٔ تقاطع دائرتین متساوی الاضلاع خواهد بود چنانکه در شکل ثابت شد۔

(دوم) هرگاه بر مرکز همدیگر عبور نکنند یعنی در صورتیکه مرکز هریکی خارج از سطح دیگری باشد پس مثلث مرتسمه بر مرکزین و مماس بنقطهٔ تقاطع دائرتین متساوی الساقین منفرجه خواهد بود یعنی انفراج زاویهٔ راس آن زیاده خواهد بود نسبت هریکی از باقی زاویتین۔

(سوم) هرگاه مرکز هر دو دائره در سطح همدیگر باشد پس مثلث مرتسمه بر مرکزین و مماس بنقطهٔ تقاطع دائرتین حادة الزوایا خواهد بود یعنی انفراج زاویهٔ راس آن کمتر خواهد بود نسبت هریکی از باقی زاویتین۔

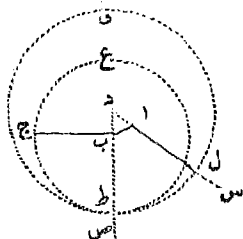
(۳) محیط هر دائره از سمت محاط یا مقعّر =

(اوّل) گنجائش رسانیدن شش مثلث متساوی الاضلاع را دارد که هر ضلع آن مساوی نیم قطر باشد۔

(دوم) گنجائش شش قوس را دارد که وتر هر قوس مساوی نیم قطر باشد۔

(۴) (سوّم) گنجایش را بسا مُسدّس را دارد که هر ضلع آن بمساوی نیم قطر باشد. اما صحی این شکل یعنی دائرہ که مادر اشکال هندسیّه میباشد دارای خواص بسیار است که در مقالات آتیه بر محل خود مذکور و مُبیّن خواهد شد در اینجا محض تشویق مبتدیان اشارت رفت

شکل (۲) عملی

از نقطۂ معلوم خارج کن خط مستقیمی را که مُساوی باشد

با خطّ مستقیم مفروض.

فرض کن (ا) نقطۂ معلوم و (ب ج) خط مستقیم مفروض مطلوب اینست که از نقطۂ (ا) خط مستقیمی بمساوی خط مُستقیم مفروض خارج شود)

وضع شکل = (بحکم اصول ۱) (ا) و (ب) را بخط مستقیم وصل کن و (بحکم ش ۱) بنا بر (اب) مثلّث متساوی الاضلاع (د اب) را

و (بحکم اصول ۲) خارج کن (د ا) و (د ب) را تا نقطه (س) و (ص)

و (بحکم اصول ۳) از مرکز (ب) بفاصلۂ (ب ج) بنا دائرۂ (ج ط ع) را که (د ص) را بر نقطۂ (ط) قطع نماید

ایضاً از مرکز (د) بفاصلۂ (د ط) بنا دائرۂ (ط ق ل) را که (د س) را بر نقطۂ (ل) قطع نماید

ثبوت = چونکہ (ب) مرکز دائرۂ (ج ط ع) است پس (ب ج) بمساوی (ب ط) خواهد بود

ایضاً (بحکم حد ۱۵) چونکہ (د) مرکز دائرۂ (ط ق ل) است پس (د ل) بمساوی

مُتساویان دوچند باشد نسبت بقاعده)۔

(۳) پیدا کن خطِ مستقیمی را کہ مساوی باشد با مجموعِ خطین و فرق آن)۔

(۴) چون مجموعۂ خطین را بر فرق آن بیفزایند خطی کہ حاصل شود دوچندِ خطِ اطول خواهد بود

و هرگاه از مجموعۂ خطین فرق آنها را تفریق نمایند خطی کہ حاصل شود دوچندِ خطِ اقصر خواهد بود)۔

توضیح = چون مقدار اقل را از اکثر تفریق نمایند آنچه فاضل آید فرق مقدارین نامند)۔ مثلاً هرگاه خطی را کہ طولاً یک ذرع است از خط دیگر کہ طول آن یک ذرع و نیم است تفریق نمایند پس نیم ذرعی کہ فاضل مانده است فرق خطین میباشد)۔

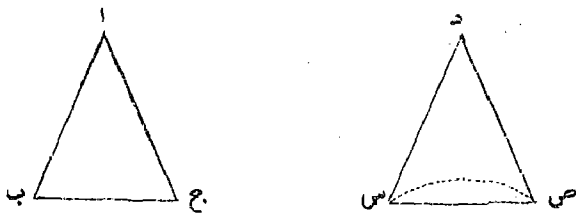
شکل (۴) اثباتی

هرگاه دو ضلعِ مُثلّثی با دو ضلعِ مُثلّثِ دیگر بانظائر خود مُتساوی باشند و زوایای این اضلاع هم متساوی باشند پس هر دو قاعدهٔ آن یعنی ضلعِ سوّم از هر مُثلّثی باهم متساوی خواهد بود و نیز زوایای مُتشکّلهٔ این اضلاع بانظائر خود مُتساوی خواهند بود)۔

ا

ب ج

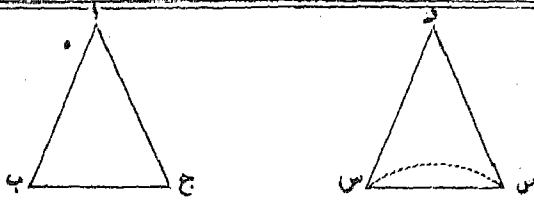
د

س ص

فرض کن در دو مُثلّث (ا ب ج) و (د س ص)

دو ضلعِ (ا ب) و (ا ج) با دو ضلعِ (د س) و (د ص) هر یکی با نظیر خود مساوی است

یعنی (ا ب) بمساوی (د س) و (ا ج) بمساوی (د ص))۔

و زاویهٔ (ب ا ج) بمساوی زاویهٔ (س د ص است)

بنابراین قاعدهٔ (ب ج) بمساوی قاعدهٔ (س ص) خواهد بود)۔

ومثلّث (ابج) بمساوی مُثلّث (د س ص)

وزوایای متقابلهٔ اضلاع ازهر دو مثلّث بانظائر خود نیز متساوی خواهند بود۔

یعنی زاویهٔ (ابج) بمساوی (د س ص) وزاویهٔ (اجب) بمساوی (د ص س) خواهد بود۔

ثبوت = بدلیل اینکه هرگاه مثلّثِ (ابج) برمثلّث (د س ص) نهاده شود

قسمیکه نقطهٔ (ا) بر نقطهٔ (د) وخط مستقیم (اب) برخطِ مستقیم (د س) منطبق کرده شود

چونکه (بموجب مفروض) (اب) مُساوی است با (د س)۔

لهذا نقطهٔ (ب) بر نقطهٔ (س) منطبق خواهد شد۔

وچون (اب) بر (د س) منطبق باشد قطعاً خط (اج) بر (د ص) منطبق خواهد شد

زیراکه (بموجب مفروض) زاویهٔ (ب اج) مساوی است با زاویهٔ (س د ص)۔

ایضاً چونکه (بموجب مفروض) (اج) بمساوی (د ص) است

لهذا نقطهٔ (ج) بر نقطهٔ (ص) منطبق خواهد شد

واَمّا انطباق نقطهٔ (ب) بر نقطهٔ (س) ثابت ومذکور شد

وچون نقطهٔ (ب) بر نقطهٔ (س) ونقطهٔ (ج) بر نقطهٔ (ص) منطبق باشد

قطعاً قاعدهٔ (ب ج) بر قاعدهٔ (س ص) منطبق خواهد شد۔

وهرگاه چنین نباشد یعنی قاعدهٔ (ب ج) بر قاعدهٔ (س ص) منطبق نباشد

ومع ذالک دو خطِ مستقیم (ب ج) و (س ص) یک سطحه را احاطه نمایند

این اثبات (بحکم علم ۱۰) ناممکن است)۔

لهٰذا (بحکم علم ۸) قاعدهٔ (ب ج) بر قاعدهٔ (س ص) منطبق

و مُثلّثِ (ا ب ج) با مُثلّثِ (د س ص) از هر حیثیت مساوی ثابت شد و منظور

همین بوده است)۔

تفهیم

(۱) هر مثلّثی شش جزو دارد یعنی سه ضلع و سه زاویه)۔
(۲) دو مثلث را انگاه متطابق گویند که بر یکدیگر منطبق شوند۔ زیرا که در اینصورت هر جزوی از یک مثلث مساوی خواهد بود با جزو مثلث دیگر موافق نظیر خود)۔ گاه باشد که دو شکل باهم متحد المساوات باشد اما منطبق نشوند (ببین تفهیم علم ۸)۔

شکل (۵) اثباتی

زوایای فوق قاعدهٔ مُثلّثِ متساوی الساقین باهم متساوی میباشند و هرگاه ساقین مُثلّث بقدر همدیگر ممتد شود نیز زوایای طرفین تحتِ قاعده هم متساوی خواهند بود

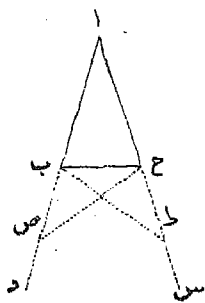
فرض کن (ا ب ج) مُثلّث متساوی الساقین و دو ضلع ان اب و اج باهم متساوی میباشند)۔

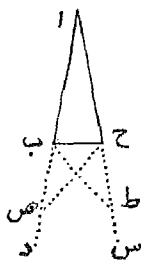
و نیز فرض کن ساقین ان (ا ب) و (ا ج) تا نقطهٔ (د) و (س) خارج شده اند

بنابراین زاویهٔ (ا ب ج) مساوی زاویهٔ (ا ج ب) خواهد بود)۔

و نیز زاویهٔ (د ب ج) مساوی زاویهٔ (س ج ب) خواهد بود)۔

وضع شکل — در خط (ب د) معیّن کن نقطهٔ را مثلاً (ص)۔

و (بحکم ش ۳) از خط اطول (ا س) قطع کن (ا ط) را که مساوی باشد با خطِ کوچک (ا ص)

وصل کن (ص ج) و (ط ب) را اختصار این کلمہ است کہ از نقطۂ (ص) الی نقطۂ (ج)
و از نقطۂ (ط) الی (ب) خطی خارج کن ؎

ثبوت = چون (اط) مساوی اص معیّن شدہ است ؎
و (بموجب مفروض) (اب) مساوی (اج) مرتسم
لهذا دو ضلع (ص ا) و (اج) با ضلعین (ط ا) و (اب) متساوی میباشند هر
یکی با نظیر خود موافق
و زاویۂ (ص اج) کہ درمیان اضلاع مذکورہ است
نسبت بهر دو یعنی (اصج) و (اطب) مشترک میباشند
ازینجهت (بحکم ش ۴) قاعدہ (ص ج) مساوی است با قاعدہ ط ب؛
و مثلّث (اصج) مساوی است با مثلّث (اط ب) ؎
و باقی زوایای یک مثلّث متساویند یا باقی زوایای مثلّث دیگر هر یکی با نظیر
خود کہ در مقابلِ اضلاعِ متساویہ واقع شدہ
یعنی زاویہ (اج ص) مساویست با زاویہ اب ط ؎
و زاویۂ (اص ج) مساوی است با زاویۂ (اط ب) ؎
زیراکہ تمام خطِ (اص) مساویست با تمام خط (اط) ؎
و (بموجب مفروض) (اب) و (اج) باهم متساویند
لهذا (بحکم علم ۳) بقیۂ حصص یعنی (ب ص) و (ج ط) باهم متساوی میباشند
واما متساوی بودنِ (صج) و (طب) ثابت و مذکور شد
بنابراین ضلعین (ب ص) و (ص ج) مساویند با ضلعین (ج ط) و (ط ب) متوافق

بانظائر خود)۔

ودر فوق ثابت ومذکور شد کہ زاویۂ (ب ص ج) مساویست بازاویۂ (ج ط ب)

لهذا (بعکس ش ۴) ۔ مثلثِ (ب ص ج) مساویست با مثلثِ (ج ط ب)۔

وزوایای آنها کہ درمقابلِ ضلاعِ متساویہ واقعند بانظائر خود متساوی میباشند

یعنی زاویۂ (ص ب ج) مساویست بازاویۂ (ط ج ب)

وزاویۂ (ب ج ص) مساویست بازاویۂ (ج ب ط)

وچون پیش ازاین ثابت شد کہ تمام زاویۂ (ا ب ط) مساویست با تمام زاویۂ (ا ج ص)

وحصص آنها یعنی زاویۂ (ج ب ط) و (ب ج ص) باهم متساویند)

لهذا بقیۂ زاویہ یعنی (ا ب ج) مساویست با بقیۂ زاویۂ (ا ج ب)

واین زوایا بر (ب ج) کہ قاعدۂ مثلثِ (ا ب ج) است واقعند)۔

ونیز در مبحث ثابت شد کہ زاویۂ (ص ب ج) مساویست با زاویۂ (ط ج ب)

واین زوایا تحتِ قاعدۂ (ب ج) میباشند)۔

لهذا زوایای فوق قاعدہ الخ

تفهیم = هرگاه دو مثلثی دو زاویۂ آن غیر متساوی باشند پس اضلاعِ متقابلۂ آنها نیز غیر متساوی خواهند بود

مشق

(۱) هرگاه بر قاعدۂ (ب ج) در یک جانب یا در جوانب متقابلۂ آن دو مثلثِ متساوی الساقین اب ج و (د ب ج) مرتسم شوند ثابت کن کہ زاویۂ (ا ب د) مساوی زاویۂ (ا ج د) میباشد)۔

(۲) متساوی بودن زوایای متقابلۂ شکلِ معین را ثابت کن)۔

(۳) (ا ب) خط مستقیمی است مفروض و (ج) نقطۂ مفروضہ کہ خارج از آن است پیدا کن در (ا ب) نقاطی را کہ فاصلۂ آنها از ج متساوی باشد با خط مستقیم (ج ع)۔
وآیا در هر حالت توان چنین نقاطی را پیدا نمود)۔

(۴) هرگاه (ج) راس مثلث متساوی الساقین و (ا) انتهای یکطرف قاعدۂ آن معلوم باشد پیدا کن (ب) انتهای طرف دیگر را در صورتیکہ انتهای آن مثلث بر خطِ مستقیم (ع ق) منطبق باشد

(۵) (اع ق ب) خطی است مستقیم بساز برابر (اب) مثلث (ا ب ج) را قسمی که ساق (اج) مساوی باشد با (اق) و ساق (ب ج) با (ع ب)

(۶) در مبحث شکل دوم ممکن است نقطهٔ (ا) را بیک طرفی از طرفین (ب ج) وصل نمائیم پس بساز شکل و ثابت کن دعوی را در صورتیکه (ا) موصول شود با (ج)

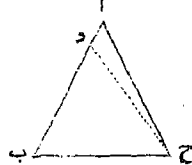
(۷) (ا ب ج د) مربعی است و (س) و (ص) و (ط) نقاط وسط در اضلاع (اب) - (ب ج) و (ج د) ثابت کن =

(اوّل) (س ص) برابر (ص ط)
(دوم) (اص) مساوی (د ص)
(سوّم) (ا ط) مساوی (اص)
(چهارم) (ب ط) مساوی (د ص) - (برای هر ثبوتی شکلی بساز)

(۸) (اب) و (اج) اضلاع مثلث متساوی الساقین و س - ص - ط نقاط اوسط اضلاع (اب) و (ب ج) و (اج) میباشند ثابت کن (س ص) مساوی (ص ط) میباشد و نیز ثابت کن که زاویهٔ (ا س ص) برابر است با زاویهٔ (ا ط ص)

(شکل پنجم را ماموفی گویند زیرا که خلیفهٔ بغداد این شکل را بسیار دوست میداشت بحدّیکه بر ملبوسات خود نقش مینمود - مؤلف گوید این هم گویا از این قبیل باشد که هر یکی از سلاطین حالیه نشانی و علامتی از علائم مختص خود و امنای دولت قرار داده اند چنانچه فی زماننا هذا نقش هلالی نشان سلاطین عثمانیّه و شیر و خورشید مختص دودمان دولت قاجاریه میباشد دام دولتهم ۱۲ منه)

شکل (۶) اثباتی

هرگاه در مثلثی دو زاویه باهم متساوی باشند اضلاع مقابل آنها نیز باهم متساوی خواهند بود

فرض کن (ا ب ج) مثلث و زوایای آن (ا ب ج) و (اج ب) باهم متساویند

لهذا ضلع (اب) برابر ضلع (اج) خواهد بود

وضع شکل = زیرا که هرگاه (اب) مساوی (اج) نباشد

پس باید یکی بزرگ و دیگری کوچک باشد

فرض کن (اب) اطول است از (اج)۔

پس (بحکم ش ۳) از خط (ب ا) قطع کن (ب د) را که مساوی خطِ اقصر (اج) باشد وصل کن دج را

ثبوت = چون دردو مثلّثِ (دبج) و (اج ب) ضلع (دب) برابرِ (اج) مرتسم شده است

و (بج) در هردو مثلّث مشترک است

بنابراین ضلعین (دب) و (بج) مساویند با ضلعینِ (اج) و (جب) هر یکی با نظیر خود)۔

و زاویۂ (دبج) مساوی است با زاویۂ (اجب)

لهذا (بحکم ش ۴) ضلعِ دج مساویست با ضلعِ (اب)

و مثلّثِ (دبج) برابراست با مثلّثِ (اجب)

یعنی جزو مساوی کُلّ است و این (بحکمِ علم ۹) باطل)۔

بنابراین (بموجب فرضِ اوّل) (اب) و (اج) غیر متساوی نباشند

یعنی (اب) و (اج) باهم متساویند)۔

لهذا هرگاه در مثلّثی دو زاویه الخ

تفهیم = این شکل یعنی ششم عکسِ شکلِ پنجم است)۔
شکلی را عکسِ شکلِ دیگر آنگاه گویند که نتیجۂ یک شکل در شکلِ دیگر فرض نموده شود
مثلاً در شکلِ پنجم فرض شده است که ضلعین مثلّثِ معلومه متساویند و نتیجۂ آن حاصل
شد که زاویتین نیز متساوی می باشند)۔
و در شکلِ ششم فرض شده است که دو زاویہ مثلّثِ معلوم متساویند و منتج
شده است که ضلعین آن هم متساوی می باشند)۔
کذالک هرگاه در دعوی شکلی مفروضات متعدد باشد عکسِ آن نیز متعدد خواهد بود)۔

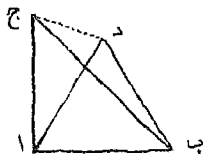
اقلیدس غالباً دعوی اشکال را معکوس نموده ثابت میکند ولیکن قاعدهٔ کلیه برای آن قرار نداده است که دعوی هر شکل بطور معکوس صحیح باشد)۔
مثلاً عکس دعوی شکل هشتم درست نباشد یعنی هرگاه سه زاویهٔ مثلثی مساوی باشند با سه زاویهٔ مثلث دیگر لازم نیست که سه ضلع این یکی هم مساوی باشد با سه ضلع آن دیگر)۔
هرگاه در مثلثی دو ضلع آن غیر متساوی باشد پس زوایای مقابلهٔ آن هم غیر متساوی خواهند بود)۔

مشق

(۱) هرگاه در مثلث متساوی الساقین (ا ب ج) زاویتین (ا ب ج) و (ا ج ب) تنصیف شوند از خط (ب د) و (ج د) که بر نقطهٔ (د) موصول باشند ثابت کن مثلث (ب د ج) متساوی الساقین است

(۲) در شکل پنجم هرگاه (ب ط) و (ج ص) بر نقطهٔ (ع) تقاطع نمایند ثابت کن مثلث (ع ب ج) متساوی الساقین میباشند)۔

شکل (۷) اثباتی

هرگاه دو ضلع متساوی از دو مثلث بر یک قاعده و بر یک طرف آن منتهی شده باشند و دو ضلع دیگر بر طرفِ دیگر آن قاعده منتهی شوند ممکن نیست که این دو ضلع باهم متساوی باشند

فرض کن (ا ب ج) و (ا د ب) دو مثلثِ معلوم و دو ضلع آن (ا ج) و (د ا) که بر قاعدهٔ (ا ب) در نقطهٔ (ا) منتهی شده اند باهم متساوی میباشند در اینصورت ممکن نیست که دو ضلع دیگر یعنی (ج ب) و (د ب) ۰ که بر نقطهٔ (ب) منتهی شده اند باهم متساوی باشند)۔

وضع شکل = وصل کن (ج د) را

(اوّل) درصورتیکه راس یك مُثلّث خارج از مثلّثِ دیگر باشد

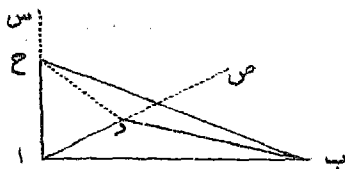
ثبوت — چون (اج) بمساوی (اد) فرض شده است

لهذا (بحکم ش ۵) زاویۂ (اج د) برابرِ زاویۂ (ادج) خواهد بود

لیکن (بحکم علم ۹) زاویۂ (اج د) اوسع است نسبت بزاویۂ (ب ج د)

وکذلك فرجۂ (ادج) بیشتر است نسبت بزاویۂ (ب ج د)

بنابراین (بحکم ش ۵) (ب ج) و (ب د) باهم متساوی نباشند)۔

(دوّم) درصورتیکه راس یك مثلّث داخلِ مثلّث دیگر واقع باشد

ممتد ساز (اج) و (اد) را الیٰ (س) و (ص)

چون (بموجب مفروض) (اج) مُساوی است با (اد)۔

لهذا (بحکم ش ۵) زاویۂ (س ج د) مُساوی است با زاویۂ (ص د ج)

(زیراکہ زوایائے تحتِ قاعدۂ (ج د) است)۔

لیکن (بحکم علم ۹) زاویۂ (س ج د) نسبت بزاویۂ (ب ج د) اوسع است

زیراکہ این جزو آن است

لهذا (بحکم ش ۵) (ب ج) و (ب د) باهم متساوی نباشند)۔

(سوّم) درصورتیکه راس یك مثلّث برضلعِ مثلّثِ دیگر واقع شود

(و) این صورت محتاج باثبات نیست)۔

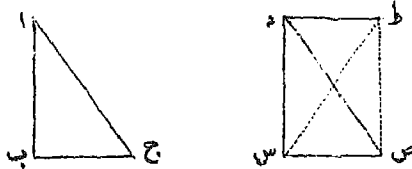
لہذا ہرگاہ دو ضلع متساوی الخ

تفہیم

(۱) بر یک قاعدہ و در یک جانب آن ممکن نیست ارتسام دو مثلث متساوی الاضلاع ہم

(۲) بر یک قاعدہ و در یکجانب آن ممکن نیست ارتسام دو مثلث متساوی الساقین کہ ہر ساق آن برابر باشد با خط مستقیم مفروض ہم

شکل (۸) اثباتی

در دو مثلث ہرگاہ ضلعین یک مثلث متساوی باشند با ضلعین مثلث دیگر متوافق بانظائر خود و نیز قاعدہ ہر دو مثلث باہم متساوی باشند پس زوایاء ہر دو مثلث کہ از اضلاع متساویہ تشکیل یافتہ اند بانظائر خود متساوی خواہند بود

فرض کن (ا ب ج) و (د س ص) دو مثلث معلومہ اند

و دو ضلع آن (ا ب) و (ا ج) متساویند با ضلعین (د س) و (د ص) ہر یکی موافق بانظیر خود

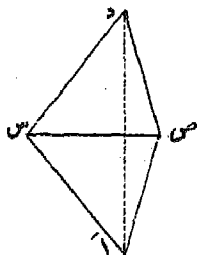
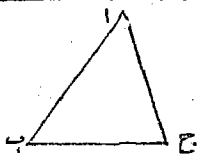
یعنی (ا ب) برابر (د س) و (ا ج) مساوی (د ص) است

و نیز قاعدہ (ب ج) مساوی قاعدہ (س ص)

بنابراین زاویۂ (ب ا ج) مساوی (س د ص) خواہد بود ہم

ثبوت = بدلیل اینکہ ہرگاہ مثلث (ا ب ج) بر مثلث (د س ص) منطبق شود

قسمیکه نقطهٔ (ب) بر (س) ونیز خط مستقیم (ب ج) برخط مستقیم (س ص) منطبق شود
وچونکه (بموجب مفروض) (ب ج) مساویست با (س ص)
لهذا نقطهٔ (ج) بر نقطهٔ (ص) منطبق خواهد شد)
کذلك قاعدهٔ (ب ج) بر قاعدهٔ (س ص) منطبق خواهد شد)۔
وبهمین طریق انطباقِ (ب ا) و (ا ج) بر (س د) و (د ص) بعمل می آید
زیراکه هرگاه قاعدهٔ (ب ج) بر قاعدهٔ (س ص) منطبق باشد
ولکن انطباق ضلعینِ (ب ا) و (ا ج) بر ضلعینِ (س د) و (د ص) واقع نشود
یعنی بر مقام مختلف مثلاً بر (س ط) و (ص ط) واقع باشد
دراینصورت بریك قاعده وبریك سمت آن دو مثلث که تمام اجزای
آنها از هر حیثیت با نظائر خود متساوی باشند واقع شده اند
واین (بحکم ش ۷) ناممکن است)۔
بنابراین چون قاعدهٔ (ب ج) منطبق شود بر قاعدهٔ (س ص) قطعاً ضلعین
(ب ا) و (ا ج) منطبق خواهند شد بر ضلعینِ (س د) و (د ص)۔
وچون زاویهٔ (ب ا ج) منطبق شود بر زاویهٔ (س د ص)
لهذا (بحکم علم ۸) باهم متساوی میباشند)۔
لهذا در دو مثلث هرگاه ضلعین الخ

بعضی از مهندسین شکل هشتم را این
قسم ثابت نموده اند که لاتعلق است بشکل هفتم

فرض کن (ا ب ج) و (د س ص) دو مثلّث‌اند و ضلعین (ب ا) و (ا ج) از یك مثلّث متساوی‌اند با ضلعین (س د) و (د ص) از مثلّثِ دیگر متوافق بانظائر خود ۔

و قاعدهٔ (ب ج) مساوی با قاعدهٔ (س ص)

پس زاویهٔ (ب ا ج) مساوی خواهد بود با زاویهٔ (س د ص) ۔

وضع شکل = یکسان یعنی منطبق ساز مثلّثِ (ا ب ج) را بر مثلّث (د س ص) قسمیکه (ب) بر نقطهٔ (س) و (ب ج) بر نقطهٔ (س ص) واقع شود

پس نقطهٔ (ج) بر (ص) واقع خواهد شد ۔

ثبوت = زیرا که بموجبِ مفروض (ب ج) مساوی (س ص) است

فرض کن برای مثلّثِ (ا ب ج) مقامی دیگر یعنی (اَ س ص) (الف مفتوحه)

پس هرگاه (د ص) و (ص اَ) و نیز (د س) و (س اَ) در یك خطِ مستقیم نباشند

وضع شکل = وصل کن (د اَ)

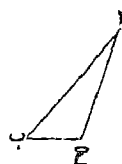
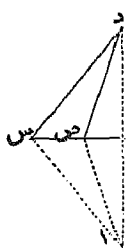
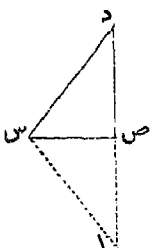
(اوّل) در صورتیکه (د اَ) قطع کند (س ص) را

چونکه (س د) برابر است با (س اَ) لهذا (بحکم ش ۵) زاویهٔ (س د اَ) مساویست با زاویهٔ (س اَ د)

ایضاً چونکه (ص د) برابر است با (ص اَ) لهذا کلِ زاویهٔ (س د ص) مساویست با کلِ زاویهٔ (س اَ ص)

یعنی (س د ص) مساوی زاویهٔ (ب ا ج) میباشد ۔

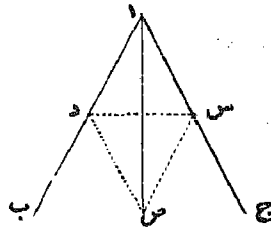
(دوّم) در صورتیکه (د اَ) موصول شود با (س ص) ممدوده ۔

(سوّم) در صورتیکه یکزوجِ اضلاع مثلاً (د ص) و (ص اَ) در یك خطِ مستقیم واقع شوند

این هر دو صورت مثل صورتِ اوّل ثابت توان نمود ۔

تفهیم

تفهیم
(۱) هرگاه اضلاعِ ثلاثۂ یک مثلث با اضلاعِ ثلاثۂ دیگر موافقِ نظیرِ خود متساوی باشند آن مثلث از هر حیثیت باهم متساوی خواهند بود۔
(۲) خطی کہ راس متساوی الساقین و نقطہ وسطِ قاعدہ را وصل دهد زاویۂ راس را تنصیف خواهد نمود۔
(۳) زوایای متقابلۂ شکلِ معین باهم متساوی میباشند و اقطارِ آن تنصیفِ زوایا نمایند۔

شکل (۹) عملی

تنصیف کن زاویۂ مستقیمۃ الخطین را یعنی تقسیم کن در دو قسمت متساویہ

فرض کن (ب ا ج) زاویۂ مستقیمۃ الخطین است ومقصود اینست کہ زاویۂ مذکورہ در دو حصّۂ برابر منقسم شود۔

وضع شکل = در (ا ب) نقطۂ را مثلاً (د) معیّن کن
و (بحکم ش ۳) از خطِ (ا ج) قطع کن مقدار (ا س) را کہ برابر باشد با (ا د)
وصل کن (د س) را
و (بحکم ش ۱) بر ضلع (س د) بساز مثلث متساوی الاضلاع (س د ص) کہ محاذی (ا) باشد۔
وصل کن (ا ص) را۔

لهذا خطّ مستقیم (اص) منصّف زاویهٔ (ب اج) خواهد بود)۔

ثبوت = بدلیل اینکه (اد) مساوی (اس) مرتسم شده است

لهذا (اص) نسبت بهر دو مثلّث یعنی (د اص) و (س اص) مشترکست

بنابراین ضلع (دا) و (اص) متساویند با ضلعین (س ا) و (اص)

هریکی موافق با نظیر خود)۔

وچون قاعدهٔ (د ص) مساوی قاعدهٔ (س ص) مرتسم شده است

لهذا (بحکم ش ۸) زاویهٔ (د اص) مساویست با زاویهٔ (س اص)

لهذا تنصیف زاویهٔ مستقیمة الخطّین (ب اج) بوسیلهٔ خط

(اص) بعمل آمد و مقصود همین بوده)۔

تفهیم

(۱) مثلّث (د س ص) که بعید از (ا) مرتسم شده است از این جهت است که هرگاه بجانب (ا) ساخته میشد ممکن بود که نقطهٔ (ص) بر نقطهٔ (ا) منطبق شود پس درین صورت تنصیف زاویه بطریق مذکور ناممکن بود

(۲) خط (اص) بر (د س) عمود میباشد)۔

(۳) در (اص) هر نقطهٔ که معین شود فاصلهٔ آن نسبت به (د) و (س) مساوی خواهد بود

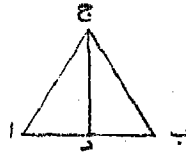
(۴) زاویهٔ (د ص س) را (اص) تنصیف میکند)۔

(۵) ممکن است بجای مثلّث متساوی الاضلاع (مثلّث) متساوی الساقین ساخته نتیجهٔ دعوی را ثابت کنیم)۔

مشق تقسیم کن مثلّث متساوی الساقین را در دو مثلّث متساوی الزوایا)۔

شکل (۱۰) عملی

تنصیف کن خط مستقیم محدود را

یعنی تقسیم کن در دو قسمت متساوی

فرض کن اب خطِ مستقیم معلوم و مطلوب اینست که خط (اب) در دو حصّهٔ برابر منقسم شود۔

وضع شکل = (بحکم ش ۱) بر (اب) رسم کن مثلثِ متساوی الاضلاع (ابج) را

و (بحکم ش ۹) تنصیف کن زاویهٔ (اج ب) را بوسیلهٔ خطِ مستقیم (ج د) کرد (اب) بر نقطهٔ (د) برسد۔

لهذا (اب) در نقطهٔ (د) تنصیف خواهد شد۔

ثبوت بدلیل اینکه (بحکم حد ۲۴) (اج) مساوی (ج ب) مرتسم شده است و در هر دو مثلثِ (اج د) و (ب ج د) خطِ مستقیم (ج د) مشترک است بنابراین ضلعین (اج) و (ج د) مساویند با ضلعین (ب ج) و (ج د) متوافق با نظائر خود۔

و چون زاویهٔ (اج د) بازاویهٔ (ب ج د) متساوی مرتسم شده است لهذا قاعدهٔ (اد) برابر است با قاعدهٔ (ب د)

لهذا تنصیف خطِ مستقیم (اب) بر نقطهٔ (د) بعمل آمده ظاهر بوده است

مشق

(۱) ثابت کن خطِ (ج د) که تنصیف (اب) میکند بر آن عمود است۔

(۲) بنما خطِ مستقیم محدود را بوسیلهٔ دائرتین چر قسم توان تنصیف نمود۔

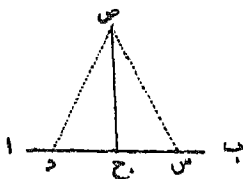
(۳) برقاعدۂ معلومہ رسم کن متساوی الساقینی را قسمیکہ مجموعہ دو ضلع متساویۂ ان مساوی باشد باخطِ مستقیم مفروض)۔

(۴) هرگاه در شکلِ هم تنصیف نمائیم زاویۂ (ا) را بہ (اس) کہ در (ج ب) بر نقطۂ (س) موصول شود ثابت کن کہ (ب س) مساوی (ب د) خواهد بود

(۵) هر نقطۂ کہ از (ا) و (ب) بفاصلہ مساوی باشد آن نقطہ در (ج د) واقع خواهد شد)

شکل (۱۱) عملی

برخطِ مستقیم معلوم و بر نقطۂ معلومۂ آن خارج کن

خطِ مستقیمیکہ بخطِ معلومۂ مذکورہ زاویۂ قائمہ تشکیل نماید

فرض کن اب خطِ مستقیم معلوم و ج نقطۂ معلومۂ در آن

مطلوب اینست کہ بر نقطۂ ج خطِ مستقیمی قائم شود

کہ بر (اب) زاویۂ قائمہ تشکیل نماید)۔

وضع شکل = معین کن در (اج) نقطۂ را مثلاً (د)

و (بحکم ش ۳) ج س را بمساوی ج د معین کن

و (بحکم ش ۱) بساز بر د س مثلثِ متساوی الاضلاع (د ص س) را

وصل کن ج ص را

بنا برین خطِ مستقیم ج ص کہ بر نقطۂ (ج) قائم شدہ است

بر (اب) زاویۂ قائمہ تشکیل خواهد نمود

ثبوت = زیراکہ (د ج) برابر ج س مرتسم شدہ است)

و(ج ص) نسبت بہر دو مُثلّثِ (د ج ص) و(س ج ص) مشترک میباشد
لهذا ضلعینِ (د ج) و(ج ص) متساویند با ضلعینِ (س ج) و(ج ص) متوافق
بانظیر خود)۔
ونیز (بحکم حد ۲۴) قاعدۂ د ص برابر است با قاعدۂ س ص)۔
لهذا (بحکم ش ۸) زاویۂ (د ج ص) مساویت بازاویۂ (س ج ص)
واین زوایا در دو جانب خطِ (ج ص) واقع شده اند
لهذا (بحکم حد ۱۰) هریکی ازاین زوایا یعنی (د ج ص) و(س ج ص) قائم میباشند)۔
ومطلوب همین بوده است)۔

مشق

(۱) در مثلّثِ مفروضہ اب ج تنصیفِ ضلع (اب) بر نقطۂ د وتنصیفِ اج بر نقطۂ س میشود و بر اب از نقطۂ (د) عمود د ص و بر اج از نقطۂ س عمود (س ص) قائم میشود ثابت کن کہ ص ا و ص ب و ص ج باهم متساویند)۔
(۲) بساز مثلّثِ متساوی السّاقینی کہ قائم الزاویہ باشد)۔
(۳) مثلّثِ قائم الزاویۂ بساز کہ قاعدۂ ان بقدر نصفِ وتر باشد)۔

شکل (۱۲) عملی

بر خطِ مستقیم غیر محدود واز نقطۂ معلومہ کہ خارج ازان خط واقع باشد عمود قائم کن

فرض کن اب خطِ مستقیم معلوم کہ امتدادِ ان از هر دو طرف نامحدود میباشد

و (ج) نقطۂ معلومہ کہ خارج از آن خط واقع شدہ است)۔

مقصود اینست کہ از نقطۂ (ج) عمودے بر (اب) قائم شود)۔

وضع شکل = در جانب تحتِ (اب) معیّن کن نقطہ را مثلاً (د)

و بحکم اصول (۳) از مرکز (ج) بفاصلۂ (ج د) بساز دائرۂ (س ط ص) را

کہ با (اب) در نقاط (ص) و (ط) تقاطع نماید

و بحکم (ش ۱۰) تنصیف کن (ص ط) را بر نقطۂ (ع)

وصل کن (ج ع) را

لهذا خطِ مستقیم (ج ع) کہ از نقطۂ (ج) ممتدّ شدہ است بر (اب) عمود خواہد بود)۔

ثبوت = وصل کن (ج ص) و (ج ط) را

وچون (ص ع) بمساوی (ع ط) مرتسم شدہ است

و (ع ج) در ہر دو مثلث یعنی (ص ع ج) و (ط ع ج) مشترک است بانظر

لهذا ضلعین (ص ع) و (ع ج) متساوی اند با ضلعین (ط ع) و (ع ج) متوافقاً

و بحکم (حد ۱۰) قاعدۂ (ج ص) مساویست با قاعدۂ (ج ط)

لهذا (بحکم ش ۸) زاویۂ (ج ع ص) مساویست با زاویۂ (ج ع ط)

واین زوایا در جانبین عمود (ج ع) میباشند

لهذا (بحکم حد ۱۰) هر یکی از این زوایا یعنی (ج ع ص) و (ج ع ط) قائمه میباشند

و خط مستقیم که تشکیل آنها نموده است یعنی (اب) عمود میباشد

لهذا بر خط مستقیم (اب) از نقطهٔ (ج) که خارج از آن بود عمود قائم شد

مشق

(۱) هر گاه طول خط مستقیم غیر محدود نباشد بنما در این صورت شکل چه نقص واقع خواهد شد

(۲) در مثلث متساوی الاضلاع خطوطی که بر نقاط وسط اضلاع از زوایای متقابله قائم شوند ثابت کن که باهم متساوی خواهد بود

(۳) اقطار شکل معین همدیگر را بر زاویهٔ قائمه تقاطع نمایند

(۴) هر گاه اقطار ذوار بعة الاضلاع همدیگر را بر زاویهٔ قائمه تنصیف نمایند آن شکل مربع خواهد بود

(۵) خطوطی که تنصیف نمایند زوایای قاعدهٔ متساوی الساقین را از آنها نیز متساوی الساقین مرتسم خواهد شد

(۶) خطوطی که نقاط وسط اضلاع متساوی الاضلاع را وصل دهند از آنها نیز متساوی الاضلاع مرتسم گردد

شکل (۱۳) اثباتی

خط مستقیمیکه بر خط مستقیم دیگر در یک جهت تشکیل زوایا مینماید آن زوایا از دو حال خارج نباشد ـ یا هر یکی از آنها زاویهٔ قائمه میباشد و یا اینکه مجموعهٔ هر دو زاویه مساوی دو قائمه خواهند بود

فرض کن (اب) خطی است مستقیم و بر خط مستقیم (ج د) در یکجهت زاویهٔ (ج ب ا) و (ا ب د) را تشکیل مینماید

بنا بر این هر یکی از این زوایا قائمه خواهد بود یا اینکه مجموعهٔ هر دو زاویه دو قائمه خواهند بود

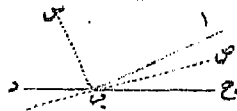
ثبوت = بدلیل اینکہ ہرگاہ زاویۂ (ج ب ا) مساوی باشد با زاویۂ (ا ب د)
پس (بحکم حد ۱۰) ہر یکی از انہا قائمہ میباشد)ـــ
لیکن ہرگاہ زاویۂ ج ب ا مساوی زاویۂ ا ب د نباشد
پس (بحکم شـ ۱۱) خارج کن بر ج د از نقطۂ ب خط مستقیم (ب س) را کہ بر
(ج د) زاویہ قائمہ پیدا کند)ـــ
لھذا (بحکم حد ۱۰) (ج ب س) و (س ب د) دو قائمہ اند
و زاویۂ (ج ب س) مساویست با مجموعۂ زاویتین ج ب ا و (ا ب س)
بیفزای بر ہر یکی ازین متساویتا زاویۂ (س ب د) را
پس (بحکم علم ۲) مجموعۂ زاویتین (ج ب س) و (س ب د) مساویست
با مجموعۂ سہ زاویہ
یعنی (ج ب ا) و (ا ب س) و (س ب د)ـــ
ایضاً چونکہ زاویۂ (د ب ا) مساویست با زاویتین (د ب س) و (س ب ا)
بیفزای بر ہر یکی ازین متساویات (ا ب ج) را
لھذا (بحکم علم ۲) زاویتین (د ب ا) و (ا ب ج) مساویند با سہ زاویہ
یعنی د ب س) و (س ب ا) و (ا ب ج لیکن در فوق ثابت و مذکور شد
کہ زاویتین (ج ب س) و (س ب د) مساویند بہمین سہ زاویہ

لهذا زاویتین (ج ب س) و (س ب د) مساوی‌اند با زاویتین (د ب ا) و (ا ب ج)
ولکن (ج ب س) و (س ب د) دو قائمه میباشند
پس مجموعهٔ (د ب ا) و (ا ب ج) نیز دو قائمه میباشند)

لهذا خط مستقیمیکه بر الخ

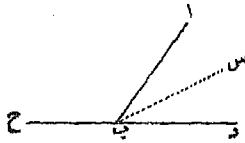
تفهیم

(۱) چونکه مجموعهٔ زاویتین (ا ب ج) و (ا ب د) مساوی دو قائمه اند لهذا هر یکی از زاویتین را تکملهٔ قائمتین گویند)
و امّا هرگاه مجموعهٔ دو زاویه مساوی یک قائمه باشد هر یکی را مُکمّل قائمه گویند)
این حدود را بذهن خود بسپار :
(اوّل) مُتمّم یعنی مُکمّل زاویهٔ حادّه آن مقدار زاویه ایست که چون منضم بحادّه شود مجموعهٔ هر دو تشکیل نمایند یک قائمه را)
مثلاً زاویتین (ا ب ج) و (ا ب س) مُکمّل یکدیگرند)
(دوّم) تکملهٔ دو قائمه آن مقدار زاویه ایست که چون منضم شود بزاویهٔ معلوم مجموعهٔ آن تشکیل دو قائمه نماید)
مثلاً زاویتین (ا ب ج) و (ا ب د) تکملهٔ یکدیگرند)

(۲) خط مستقیمیکه بر خط مستقیم دیگر واقع شود و دو زاویه در دو جانب خود تشکیل نماید پس این زوایا را خطوطی که تنصیف میکنند تشکیل زاویهٔ قائمه خواهند نمود)

مثلاً خط مستقیم (ا ب) بر خط مستقیم (ج د) واقع و در دو جانب خود دو زاویهٔ متّصله تشکیل داده است)
یعنی زاویهٔ (ج ب ا) و (ا ب د)
این زوایا را خط (س ب) و (ص ب) تنصیف میکنند)
لهذا از این دو خط خط (ب ص) را منصّف داخلی و (ب س) را منصّف خارجی گویند)
پس در هر یکی از زوایا منصّف داخلی و خارجی بر قائمه متقاطع خواهند بود)

شکل (۱۴) اثباتی

هرگاه دو خط مستقیم بر یک نقطهٔ دو خط مستقیم دیگر

از سمتِ متقابل ممتد شدہ اتّصال نمایند و دو زاویۂ بمساوی دو قائمہ تشکیل نمایند پس این دو خطِ مستقیم بعد از اتّصال بریک خطِ مستقیم واقع خواهند شد یعنی هر دو در حکم یک خطِ مستقیم اند۔

فرض کن بر نقطۂ (ب) کہ طرفِ انتہائے خطِ مستقیم (اب) میباشد دو خطِ مستقیم (ب ج) و (ب د) از دو سمتِ متقابل ممتد شدہ در نقطۂ (ب) اتّصال نمودہ زاویتینِ (ا ب ج) و (ا ب د) کہ مجموعہ آنها دو قائمہ میباشد تشکیل دادہ اند

لهٰذا (د ب) و (ب ج) در یک خطِ مستقیم واقع خواهند بود۔

ثبوت = زیرا کہ هرگاہ (ب د) مع (ب ج) بریک خطِ مستقیم نباشند پس در صورتِ امکان

فرض کن (ب س) با (ب ج) اتّصال نمودہ بریک خطِ مستقیم واقع شدہ است۔

در اینصورت خطِ مستقیم (ا ب) با خطِ مستقیم (ج ب س) وصل میشود۔

لهٰذا (بحکم ش ۱۳) زوایای متّصلہ مساوی دو قائمہ میباشند۔

یعنی (بموجب مفروض) زاویتین (س ب ا) و (ا ب د) باهم مساوی دو قائمہ اند۔

وحال آنکہ زاویتین (ا ب ج) و (ا ب د) هم دو قائمہ میباشند۔

بنابراین (بحکم علم ۲) چون زاویتین (ا ب ج) و (ا ب س) متساویند با

زاویتین (ا ب ج) و (ا ب د)

خارج کن از هر یکی از این متساویا زاویۂ مشترکۂ (ا ب ج) را

پس (بحکم علم ۳) باقی زاویۂ (ا ب س) برابر است با باقی زاویۂ (ا ب د)

یعنی زاویۂ کوچک مساوی شد با زاویۂ بزرگ و این ناممکن است)۔

لهذا (ب س) و (ب ج) در یک خطِ مستقیم واقع نباشند)۔

و نیز توان ثابت نمود کہ بغیر از خط مستقیم (ب د) هیچ خط مستقیمی بعد از اتّصال با (ب ج) بر یک خطِ مستقیم واقع نخواهد بود)۔

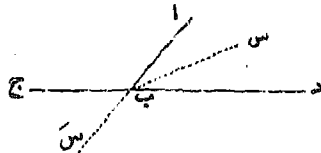
بنابراین (ب د) است کہ بعد از اتّصال با (ج ب) بر یک خطِ مستقیم واقع میشود)۔

لهذا هرگاه در خطِ مستقیم بر یک نقطۂ الخ

تفهیم

(۱) این شکل عکس شکل سیزدهم است)۔

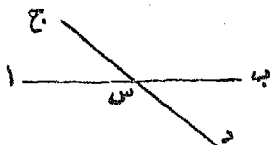
(۲) قید دو سمتِ متقابل درین شده است چه هرگاه این قید نباشد ممکن است کہ دو خطِ مستقیم با خط مستقیم ثالث دو زاویۂ قائمہ پیدا کنند و خودِ آن خطوطِ ممدوده بعد از اتصال در یک خطِ مستقیم نباشند

یعنی چنانکہ خطِ (ب س) فوقانی کشیده شده است تحتانی هم توان کشید)۔

مثلاً (سَ ب) (سینِ مفتوحہ) بعد از اتّصال با نقطۂ (ب ا) دو قائمہ پیدا کرده است)

یعنی مجموعۂ (سَ ب ج) و (ج ب ا) دو قائمہ میباشد)

و حال آنکہ (سَ ب) با (ب ج) در یک خطِ مستقیم نباشد

شکل (۱۵) اثباتی

هرگاه دو خطِ مستقیم متقاطع همدیگر باشند زوایای متقابلهٔ آن باهم متساوی خواهند بود

فرض کن (اب) و (ج د) دو خط مستقیم و یکدیگر را در نقطهٔ (س) قطع می‌کنند (لهذا زاویهٔ (ا س ج) مساوی زاویهٔ (د س ب) و نیز زاویهٔ (ج س ب) مساوی زاویهٔ (ا س د) خواهد بود)۔

ثبوت = چون خطِ مستقیم (ا س) بر خطِ مستقیم (ج د) دو زاویهٔ متصله یعنی (ج س ا) و (ا س د) در نقطهٔ (س) تشکیل میدهد لهذا بحکم (ش ۱۳) مجموعهٔ این دو زاویه مساوی دو قائمه میباشد ایضاً چونکه خط مستقیم (د س) بر خط مستقیم (ا ب) دو زاویهٔ متصله (ا س د) و (ب س د) در نقطهٔ (س) متشکل نموده است و بحکم (ش ۱۳) مجموعهٔ این دو زاویه هم مساوی دو قائمه میباشد در فوق ثابت شد که مجموعهٔ زاویتین (ج س ا) و (ا س د) مساوی دو قائمه میباشد

لهذا مجموعهٔ زاویتین (ج س ا) و (ا س د) مساوی است با دو زاویهٔ (ا س د) و (ب س د)

از هر یکی از این متساویات خارج کن زاویهٔ مشترکهٔ (ا س د) را

پس (بحکم علم ۳) باقی زاویهٔ (ج س ا) مساوی است با باقی زاویهٔ (د س ب)

و بهمین تفصیل ثابت میشود که (ج س ب) مساوی است با زاویهٔ (ا س د)

لهذا هرگاه دو خط مستقیم متقاطع الخ

تفهیم ــ از این منتج میشود (مبحث)

(۱) اینکه دو خط مستقیم که در یك نقطه متقاطع یکدیگر باشند در آن نقطه زوایای متشکله این دو خط مساوی چهار قائمه میباشند)ــ

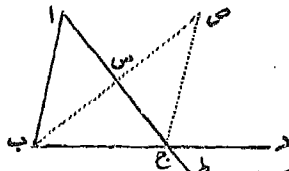
(۲) همین طور هر قدر خطوط مستقیمه در یك نقطه متقاطع یکدیگر باشند مجموعه زوایای آنها مساوی چهار قائمه میباشد)ــ

مشق

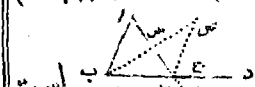
(۱) هرگاه در شکل مذکوره زاویه (اس د) را (ص س) تنصیف نماید و زاویه (ب س ج) را (ط س) تنصیف کند ثابت کن
که (ص س) و (ط س) در یك خط مستقیم واقع خواهند شد)ــ

(۲) هرگاه در یك خط مستقیم (اب) نقطهٔ معیّن شود مثلاً (س) واز این نقطه دو خط مستقیم (س ج) و (س د) از دو سمت متقابل (اب) خارج شوند
قسمیکه زاویه (اس ج) مساوی (ب س د) باشد ثابت کن که (س ج) و (س د) در یك خط مستقیم واقع شوند

شکل (۱۶) اثباتی

هرگاه ضلع مثلثی را ممتد سازند زاویه خارجه که از امتداد این ضلع پیدا شود از هر زاویه داخله که مقابل واقع است اوسع خواهد بود یعنی بزرك خواهد بود

فرض کن (ا ب ج) مثلث و ضلع آن (ب ج) تا نقطهٔ (د) خارج شده
لهذا زاویه خارجه (اج د) نسبت بهر یکی از زوایای داخلهٔ (ج ب ا) و (ج ا ب) بزرگ خواهد بود که مقابل واقع شده اند)ــ

وضع شکل = (بحکم ش ۱۰) (اج) را بر نقطهٔ (س) تنصیف کن
و وصل کن (ب س) را)ــ

و (بحکم ش ۳) تا نقطۂ (ص) چنان خارج کن کہ (س ص) مساوی (س ب) باشد،
وصل کن (ص ج) را)۔

ثبوت = چونکہ (ا س) برابر (س ج) و (ب س) برابر (س ص) مرتسم شدہ است
لھذا ضلعین (ا س) و (س ب) مساویند باضلعین (ج س) و (س ص)
موافق نظیر خود)۔
و (بحکم ش ۱۵) زاویتین (ا س ب) و (ج س ص) باھم متساویند
زیراکہ متقابلہ میباشند)۔
لھذا (بحکم ش ۴) مثلث (ا س ب) برابر است با مثلث (ج س ص)
و باقی زوایاے یک مثلث متساویند باباقی زوایای مثلث دیگر متوافق
با نظائر خود)۔
یعنی زاویۂ (ب ا س) برابر است با زاویۂ (س ج ص) و (س ب) مساوی
با (س ص ج)
لکن (بحکم علم ۹) کلّ زاویۂ (س ج د) بزرگست نسبت بزاویۂ (س ج ص)
کہ جزو آن است)۔
لھذا زاویۂ (ا ج د) اوسع باشد نسبت بزاویۂ (ب ا س)
بھمین تفصیل ھرگاہ ضلع (ب ج) تنصیف شود و ضلع (ا ج) را تا
نقطۂ (ط) خارج کنیم
ثابت خواھد شد کہ زاویۂ (ب ج ط) بزرگست نسبت بزاویۂ (ا ب ج)
و (بحکم ش ۱۵) زاویۂ (ب ج ط) مساویست با زاویۂ (ا ج د)

بنابراین ثابت شد کہ زاویۂ (اج د) بزرگتر است نسبت بزاویۂ (اب ج)

هٰذا هرگاه ضلعِ مثلّثے را ممتد سازند الخ)۔

مشق

(۱) ثابت کن از یک نقطہ تا بخطِ مستقیمے زیاده از دو خطِ مستقیم متساوی نتوان خارج نمود)۔

(۲) ثابت کن زوایای متساویۂ مثلثِ متساوی الساقین حادّه میباشند)۔

(۳) ثابت کن هرگاه یک زاویۂ مثلثی قائمہ یا منفرجہ باشد باقی زوایای آن حادّه خواهند بود)

(۴) ثابت کن از یک نقطہ کہ خارج از خطِ مستقیم است زیاده از یک عمود نتوان برخطِ مذکور قائم نمود)۔

(۵) مثلث ایکہ در شکلِ مذکور متشکّل شده اند زوایای خارجۂ آنها را بما کدام زاویۂ داخلہ برابر شد)۔

(۶) سہ مثلث بساز قسمیکہ در یکی از آنها زاویۂ خارجہ برابر باشد با زاویۂ داخلہ کہ متصل است ودر دوّمی کوچک ودر سوّمی بزرگ باشد)۔

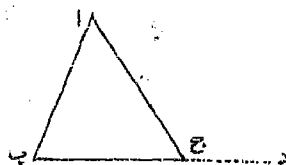
(۷) ثابت کن هرگاه در شکل (۱۶) (اص) موصول شود پس (اص) برابر است با (ب ج) وسطحِ مثلثِ (اب ج) برابر است با سطحِ مثلثِ (اج ص)

(۸) موافق نتیجۂ فوق بر یک قاعده قائم کن سلسلۂ مثلثات را قسمیکہ سطوحِ آنها باهم متساوی ورؤس آنها متساوی الابعاد باشند از حیث ارتفاع)۔

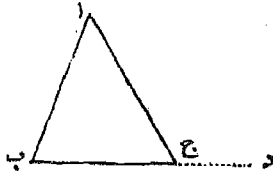
(۹) زاویۂ راس مثلثِ متساوی الساقین گاه حادّه میباشد وگاه منفرجہ وگاهی قائمہ)۔

شکل (۱۷) اثباتی

مجموعۂ زاویتین هر مثلث از دو قائمہ کمتر میباشد

فرض کن (اب ج) مثلث است وصنجملہ زوایای ثلاثۂ آن

مجموعۂ دو زاویہ کمتر از دو قائمہ خواهد بود یعنی مجموعۂ (اب ج) و (اج ب)

کمتر است نسبت بدو قائمہ)۔

وضعِ شکل = خارج کن (ب ج) را تا نقطۂ (د)

ثبوت = چون (اج د) زاویۂ خارجۂ مثلّث (اب ج) است

لهذا (بحکم ش ۱۶) نسبت بزاویۂ داخله یعنی (اب ج) اعظم است ۔

بیفزای بر هر یکی ازین غیر متساویات زاویۂ (اج ب) را

لهذا مجموعۂ زاویۂ (اج د) و (اج ب) زیاده است نسبت بزاویتین (اب ج) و (اج ب)

وچون (بحکم ش ۱۳) مجموعۂ زاویتین (اج د) و (اج ب) مساوی بدو قائمہ میباشد

لهذا مجموعۂ زاویتین (اب ج) و (ب ج ا) کمتراست نسبت بدو قائمہ ۔

بهمین تفصیل ثابت توان نمود کہ مجموعۂ زاویتین (ب اج) و (اب ج) کمتراست از دو قائمہ ۔

ونیز مجموعۂ دو زاویہ یعنی (ج اب) و (اج ب) کمتراست از دو قائمہ ۔

لهذا مجموعۂ زاویتین هر مثلّث الخ

مشق

(۱) هرگاه در مثلّثی دو زاویہ غیر متساوی باشند اصغر آن حادّه خواهد بود ۔

(۲) هر مثلّثی را مجموعۂ دو زاویۂ خارجہ از دو قائمہ بیشتر است ونیز مجموعۂ سہ زاویہ خارجہ از سہ قائمہ بیشتر ۔

(۳) ثابت کن در مثلّث غیر ممکن است دو زاویۂ قائمہ باشد ۔ ونہ دو منفرجہ ۔ ونہ یک منفرجہ و یک قائمہ

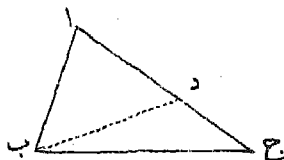
(۴) ثابت کن هر یکی از دو زاویہ واقع بر قاعدۂ متساوی الساقین حادّه میباشد ۔

(۵) در مثلّث قائم الزاویہ از زاویہ قائمہ
در مثلّث منفرج الزاویہ از زاویۂ منفرجہ
در مثلّث حادّة الزاویہ از زاویۂ حادّه
عمودیکہ بر ضلع مقابل کشیده شود درون مثلّث خواهد بود

(٦) در مثلّث منفرج الزّاویہ عمودیکہ از زاویۂ حادّہ بر ضلع مقابل کشیدہ شود از مثلّث بیرون واقع خواہد بود

شکل (۱۸) اثباتی

ہرگاہ یک ضلع مثلّثی اطول باشد نسبت بضلع دیگر پس زاویۂ کہ مقابل ضلع اطولست اعظم خواہد بود نسبت بزاویۂ کہ مقابل ضلع اقصر است

ا
د
ب ج

فرض کن (ا ب ج) مثلّث و ضلع آن (ا ج) اطولست نسبت بضلع (ا ب)

لہذا زاویۂ (ا ب ج) اعظم خواہد بود نسبت بزاویہ (ا ج ب)

وضع شکل = (بحکم ش ۳) در ضلع (ا ج) کہ اطولست معیّن کن مقابل (ا د) را بمساوی (ا ب)

وصل کن (ب د) را

ثبوت = چونکہ زاویۂ (ا د ب) زاویۂ خارجۂ مثلّث (ب د ج) میباشد

لہذا (بحکم ش ۱٦) اعظم است نسبت بزاویۂ (د ج ب)

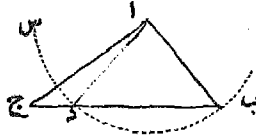
ولکن (بحکم ش ۵) زاویۂ (ا د ب) برابر است با زاویۂ (ا ب د)

بدلیل اینکہ ضلع (ا د) بمساوی (ا ب) فرض شدہ است

بنابرین زاویۂ (ا ب د) بزرگست از زاویۂ (ا ج ب)

پس (بحکم علم ۹) زاویۂ (ا ب ج) بدرجۂ اولی اعظمست از زاویۂ (ا ج ب)

لہذا ہرگاہ یک ضلع مثلّثی الخ

تفہیم = بعضی از مہندسین دعویٰ مذکورہ را بر قسم ثابت کنند

مثلاً از مرکز ا و بنیم قطر اب رسم کن دائرہ ب د س را
قسمی کہ ب ج را بر نقطۂ د قطع نماید
وصل کن ا د را ؛
چونکہ اب مساوی اد است لہذا زاویۂ ا د ب برابر است با زاویۂ ا ب د ؛
ولکن (بحکم ش ۱۶) زاویۂ ا د ب اعظم است از زاویۂ اج ب ؛
لہذا زاویۂ اب د اعظم است از زاویۂ اج ب ؛

شکل (۱۹) اثباتی

در ہر مثلث مقابلِ زاویۂ بزرگ ضلعِ بزرگ واقع میشود

فرض کن ا ب ج مثلث است و زاویۂ ا ب ج اعظم است از زاویۂ اج ب

لہذا ضلع اج اطول خواہد بود نسبت بضلع اب ؛

ثبوت = بدلیل اینکہ ہرگاہ اج اطول نباشد بایدکہ مساوی

(اب) یا اینکہ اقصر از (اب) باشد

در صورتیکہ (اج) مساوی (اب) باشد ؛

پس (بحکم ش ۵) می باید زاویۂ (ا ب ج) برابر باشد با زاویۂ (اج ب) ؛

لکن مفروض چنین نیست ؛

بنا براین ثابت شد کہ اج بمساوی اب نباشد)۔

واما درصورتیکہ اج اقصر باشد نسبت باب)۔

پس (بحکم ش ۱۸) میباید زاویۂ ابج کوچک باشد نسبت بزاویۂ اج ب)۔

ولکن مفروض نہ اینست)۔

لھذا معلوم شد کہ اج اقصر ھم نیست از اب)۔

پس ثابت شد کہ اج اطول است نسبت باب)۔

لھذا درھر مثلثی مقابل زاویہ الخ

مشق

(این شکل عکس شکل ۱۸ میباشد)۔

(۱) وتر مثلث قائم الزاویہ اطول است نسبت بھر ضلع آن)۔

(۲) در مثلث منفرج الزاویہ ضلع مقابل زاویہ منفرجہ اطول نسبت بھر ضلع آن)۔

(۳) وتر مستطیل و وتر مربع اطول است نسبت بھر ضلع آن)۔

(۴) ھرگاہ یک ضلع مربع ممتد شود و در آن نقطۂ معیّن شود و از واس زاویہ مقابل خطی تا بآن نقطہ خارج شود آن خط از وتر مربع اطول خواھد بود)۔

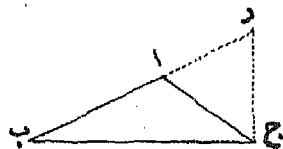
(۵) از یک نقطہ نتوان تا بخط مستقیم سہ خط متساوی خارج نمود)۔

(۶) از راس مثلث متساوی الساقین تا ھر نقطۂ در قاعدہ ھرگاہ خطی کشیدہ شود از یک ساق آن اقصر خواھد بود مگر آن نقطہ ھرگاہ در قاعدہ ممدودہ باشد خط مذکور اطول خواھد بود)۔

(۷) اگر ابج مثلثی باشد کہ در آن ضلع اب نسبت باج اطول نباشد و بر یک نقطۂ از بج مثلاً د خط اد کشیدہ شود پس آن خط نسبت باج اقصر خواھد بود)۔

(۸) ھرگاہ از زاویۂ راس مثلثی عمود بر قاعدہ خارج شود و مثلث را در دو قسمت غیر متساوی تقسیم نماید قسمت بزرگ آن متصل بضلع اطول خواھد بود)۔

شکل (۲۰) الثانی

مجموعۂ ضلعین از اضلاع ثلاثۂ ھر مثلثی زیادہ است نسبت بضلع سوم آن

فرض کن (ا ب ج) مثلثی است و مجموعۂ ضلعین آن اطولست نسبت بضلع سوم

یعنی مجموعہ (ب ا) و (ا ج) زیادہ است نسبت با (ب ج)

و نیز مجموعۂ (ا ب) و (ب ج) زیادہ از (ا ج)

و مجموعہ (ب ج) و (ج ا) زیادہ از (ا ب)

وضع شکل = (بحکم ش ۳) (ب ا) را تا بنقطۂ (د) چنان خارج کن

کہ (ا د) بمساوی (ا ج) باشد

وصل کن (د ج) را

ثبوت = چونکہ (ا د) بمساوی (ا ج) مرتسم شدہ است

لهذا (بحکم ش ۵) زاویۂ (ا د ج) بمساوی زاویۂ (ا ج د) میباشد

ولکن (بحکم علم ۹) زاویۂ (ب ج د) اعظم است نسبت بزاویۂ (ا ج د) کہ جزو آنست

بنابراین زاویۂ (ب ج د) بزرگست از زاویۂ (ب د ج)

و چونکہ در مثلث (د ب ج) زاویۂ (ب ج د) بزرگست نسبت بزاویۂ (ب د ج)

و نیز (بحکم ش ۱۹) مقابل زاویۂ بزرگ ضلع بزرگ واقع میشود

لهذا ضلع (ب د) اطولست از ضلع (ب ج)

ولکن (ب د) بمساوی ضلعین (ب ا) و (ا ج) است

ازاین جهت مجموعۂ (ب ا) و (ا ج) زیادہ است از (ب ج)

وبهمین تفصیل ثابت توان نمود که مجموعهٔ (اب) و (بج) اطول است از (اج)

وکذلک مجموعهٔ ضلعین (بج) و (ج ا) اطول نسبت با (ا ب)

لهٰذا مجموعهٔ ضلعین از اضلاع الخ

مشق

(۱) درشکل هفتم مجموعهٔ (ا د) و (ب ج) اطول است نسبت با (اج) و (ب د)

(۲) در دائره قطر اطول است نسبت بهر خطِ مستقیمیکه در دائره واقع شود و قطر نباشد)۔

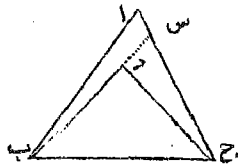
(۳) مجموعهٔ سه ضلع هر شکلِ ذو اربعة الاضلاع نسبت بضلع چهارم اطول است)۔

(۴) نصف مجموعهٔ اضلاعِ مثلّث نسبت بهر ضلعِ ان اطول و نسبت بضلعین اذا قصر میباشد

(۵) درشکل ذو اربعة الاضلاع مجموعهٔ دو وتر اطول است نسبت بهٔ ضلع مقابل آن
ومجموعهٔ اضلاع آن اطول نسبت بوترین آن و اقصر است نسبت بدو چند مجموعهٔ وترین)

(۶) درشکلِ ذو اربعة الاضلاع مجموعهٔ دو وتر اقصر است نسبت بمجموعهٔ خطوط اربعهٔ که از
یک نقطه تا بزوایای آن خارج شود (نقطهٔ تقاطع وتر مستثنیٰ است)۔

شکل (۲۱) اثباتی

هرگاه از نقاط طرفینِ ضلعی از مثلثه دو خطِ مستقیم ممتد شوند تا بنقطهٔ که
داران مثلث واقع باشد پس مجموعهٔ آن دو خطِ ممده نسبت بمجموعهٔ دو ضلع
مثلّث کمتر خواهد بود

فرض کن (ا ب ج) مثلثی است که از نقاطِ طرفینِ ضلعِ (ب ج)

یعنی از نقطهٔ (ب) و (ج) دو خطِ مستقیم (ب د) و (ج د) الی نقطهٔ (د)

که در مثلّث واقع شده است ممتد شده اند)۔

پس مجموعهٔ (ب د) و (ج د) نسبت بمجموعهٔ ضلعین (ب ا) و (ا ج) کمتر خواهد بود

ولکن زاویهٔ وسطی یعنی (ب دج) بزرگ خواهد بود نسبت بزاویهٔ (ب اج)

وضع شکل = خارج کن (ب د) را کہ در نقطہ (س) با (اج) وصل شود

ثبوت = چونکہ (بحکم ش ۲) مجموعۂ ضلعین ہر مثلّث اطول است نسبت بضلع سوّم

لهذا مجموعۂ ضلعین (ب ا) و (اس) مر مثلّث (ب اس) اطول است نسبت با (ب س)

بیفزای بر هر یکی از این غیر متساویین (س ج) را

پس (بحکم علم ۴) مجموعۂ (ب ا) و (اج) اطول است نسبت بمجموعۂ (ب س) و (س ج)

و (بحکم ش ۲) مجموعۂ ضلعین (ج س) و (س د) اطول است نسبت بضلع سوّم (ج د)

بیفزای بر هر یکی از این غیر متساویین (ب د) را

پس (بحکم علم ۴) مجموعۂ ضلعین (ج س) و (س ب) اطول است نسبت بمجموعۂ (ج د) و (د ب)

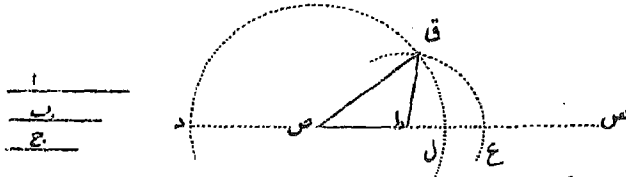
لهذا هر گاه از نقاط طرفین الخ

مشق

(۱) مجموعۂ خطوطی کہ از زوایائے مثلث تا ہر نقطۂ کہ دران واقع ہست خارج شدہ باشند اطولست نسبت بنصف مجموعۂ اضلاع آن ؂

(۲) در شکل (۱۶) زاویۂ (ب ص ج) کمتر است از زاویۂ (ا ب ج) پس ہر گاہ تغییر دادہ شود ہیئت شکل در ہر صورتی زاویۂ مذکورہ مساوی نصف زاویۂ (ا ب ج) خواہد شد

شکل (۲۲) عملی

مثلثی بسازکہ اضلاع ثلاثۂ آن مساوی باشند باسہ خط مستقیم مفروض و مجموعۂ دو خط ازان سہ خط زیادہ باشد نسبت بخط سوم

فرض کن (ا) و (ب) و (ج) سہ خطِ مستقیم مفروض کہ مجموعۂ دو خط آن اطول است نسبت بخطِ سوم ؂

یعنی مجموعۂ (ا) و (ب) اطول ست از (ج)

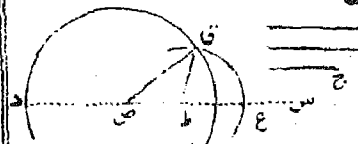
و مجموعۂ (ا) و (ج) اطول از (ب) و نیز (ب) و (ج) اطول از (ا)

مطلوب اینست مثلثی مرتسم شود کہ اضلاع ثلاثۂ آن برابر باشند باسہ خطِ مفروض (ا) و (ب) و (ج) موافق نظیر خود ؂

وضع شکل = خارج کن خطِ مستقیم (د س) راکہ طرفِ نقطۂ (د) منتہی باشد ولکن بطرفِ (س) غیر منتہی ؂

(بحکم شر ۳) معیّن کن (د ص) را برابرِ (ا)

و (ص ط) را برابرِ (ب) و (ط ع) را مساوی (ج)

و (بحکم اصول ۳) از مرکز (ص) بفاصلۂ (ص د) بساز دائرہ (د ق ل) را
و از مرکز (ط) بفاصلۂ (طع) بنا دائرۂ (ع ق) را کہ دائرۂ اوّل را بر نقطۂ (ق) قطع نماید۔

وصل کن (ق ص) و (ق ط) را۔

لہٰذا (ق ص ط) مثلّث مطلوب مرتسم خواہد شد۔

کہ اضلاعِ ثلاثۂ آن مساوی خواہند بود با خطوط معلومہ (ا) و (ب) و (ج)

ثبوت = چونکہ (ص) مرکز دائرۂ (د ق ل) است

لہٰذا بحکم حدّ ۱۵) (ص د) مساویست با (ص ق)

لکن (ص د) بمساوی (ا) معیّن شدہ است

پس بحکم علم ۱) (ص ق) بمساوی (ا) میباشد۔

و چونکہ (ط) مرکزِ دائرۂ (ع ق) است

لہٰذا (بحکم حد ۱۵) (طع) مساوی است با (ط ق)

لکن (طع) بمساوی (ج) است

لہٰذا (بحکم علم ۱) (ط ق) بمساوی (ج) می‌باشد۔

و امّا (ص ط) برابرِ (ب) خارج شدہ است

بنا براین خطوط مستقیمہ (ق ص) و (ص ط) و (ط ق) مساویند با خطوطِ مستقیمہ (ا) و (ب) و (ج)

لہٰذا مثلّث (ق ص ط) کہ اضلاعِ آن متساویند با خطوطِ ثلاثۂ مفروضہ متوافق بانظائرِ خود مرتسم کردید و مراد ہمین بودہ۔

تفہیم

تفهیم — در این دعویٰ مذکور شده است که مجموعهٔ دو خط اطول باشد نسبت بخطِ ثالث
هرگاه این شرط نباشد یعنی مجموعهٔ دو خط مساوی خط سوم یا کمتر از آن باشد تشکیلِ مثلث
مطلوب در هر دو صورت غیر ممکن است — اندکی تامّل و حل کن این عقده را

مشق

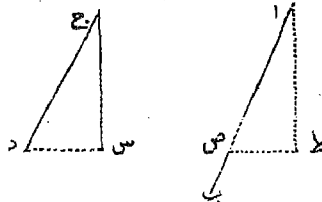
(۱) ثابت کن هرگاه مجموعهٔ دو خط کمتر از خطِ سوم باشد تقاطع دائرتین واقع نخواهد شد۔

(۲) ثابت کن هرگاه پس از اجرای عمل مماس دائرتین واقع شود مجموعهٔ دو خط را با خطِ سوم چه نسبت خواهد بود۔

(۳) ثابت کن آیا ممکن است موافق شرائطی که در دعویٰ مذکور است اقسام دیگر از مثلثات متشکل گردد۔

(۴) هرگاه (ا) و (ب) و (ج) با هم متساوی باشند بما چه نوع از مثلث تشکیل یابد۔

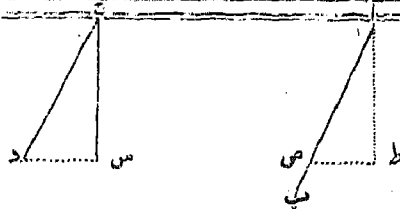
شکل (۲۳) عملی

در خط مستقیم مفروض بر یک نقطهٔ بساز زاویهٔ مستقیمة الخطین که مساوی باشد با زاویهٔ مستقیمة الخطین مفروض

فرض کن (ا ب) خط مستقیم مفروض و (ا) نقطهٔ مفروضه و (د ج س) زاویهٔ مستقیمة الخطین معلوم است۔

مطلوب اینست که بر نقطهٔ (ا) که در خطِ مستقیم (ا ب) میباشد زاویهٔ متشکل شود و مساوی باشد با زاویهٔ مستقیمة الخطین معلوم یعنی (د ج س)

وضع شکل — در خطین (ج د) و (ج س) معین کن نقطهٔ (د) و نقطهٔ (س) را۔

وصل کن (د س) را

و (بحکم شکل ۲۲) بساز مثلث (ا ص ط) را

قسمیکه اضلاع ان متساوی باشند با خطوطِ ثلاثه (ج د) و (د س) و (س ج)
بطریقیکه (ا ص) بمساوی (ج د) و (ص ط) بمساوی (د س) و (ط ا) بمساوی (س ج) باشد
لهذا زاویهٔ (ص ا ط) برابرِ زاویهٔ (د ج س) خواهد بود ۔

ثبوت = بدلیل اینکه ضلعین (ص ا) و (ا ط) برابرند با ضلعین (د ج)
و (ج س) موافق نظیر خود
وقاعدهٔ (ط ص) بمساوی قاعدهٔ (س د) مرتسم
پس (بحکم ش ۸) زاویهٔ (ص ا ط) مساویست با زاویهٔ (د ج س)
لهذا بر نقطهٔ معلومهٔ (ا) کُه در خطِ (ا ب) واقع شده است زاویهٔ
(ص ا ط) بمساوی زاویهٔ مستقیمة الخطّین معلومه یعنی (د ج س)
مرتسم کردید ۔ وهو المراد ۔

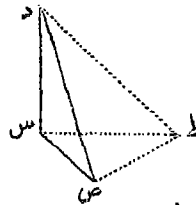
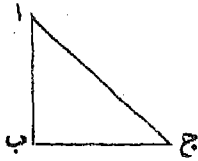
مشق

(۱) مثلثی بساز که دو ضلع مع یک زاویهٔ آن معلوم باشد ۔
(۲) مثلثی بساز که قاعدهٔ آن مساوی باشد با قاعدهٔ مثلثِ معلوم ولکن زاویهٔ راس آن
بزرگ باشد نسبت بزاویهٔ راسِ مثلثِ معلوم ۔
(۳) مثلثی بساز که قاعدهٔ آن مساوی باشد با قاعدهٔ مثلثِ معلوم ولکن زاویهٔ راس آن کوچک
و مجموعهٔ ضلعین آن اقصر باشد نسبت بزاویهٔ راس و مجموعهٔ ضلعینِ مثلثِ معلوم

شکل (۲۴) اثنا لی

هرگاه در دو مثلث ضلعین یک مثلث مساوی باشند با
ضلعین مثلث دیگر هر یکی موافق نظیر خود و در یک مثلث زاویه و سطح ضلعین معلوم اعظم باشد

اببن

نسبت بزاویۂ وسطی ضلعین معلومٔ مثلّث دیگر بزاویۂ مثلثی کہ اعظم
باشد قاعدۂ آن نسبت بقاعدۂ مثلّث دیگر اطول خواهد بود

فرض کن ا ب ج و د س ص دو مثلّث

وضلعین آن (اب) و (اج) برابرند باضلعین (دس) و (دص) هر یکی موافق بانظیر خود

یعنی (اب) برابر (دس) و (اج) برابر (دص)

لکن زاویۂ (ب اج) اعظم از زاویۂ (س د ص) میباشد)۔

لهذا قاعدۂ (ب ج) اطول است از قاعدۂ (س ص)

فرض کن در ضلعین (دس) و (دص) ضلع (دس) نسبت با (دص) اطول نباشد)۔

وضع شکل = (بحکم ش ۲۳) بر نقطۂ (د) کہ از خط (دس) است
بنا زاویۂ (س د ط) را

کہ برابر باشد بازاویۂ (ب اج)

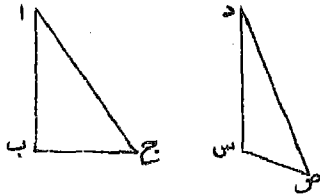
و (بحکم ش ۳) خارج کن (د ط) را مساویٔ (اج) یا (دص)

وصل کن (س ط) و (ط ص) را)۔

ثبوت = بنابرین (بموجب مفروض) (دس) مساویٔ (اب) ونیز
(د ط) مساویٔ (اج) هر تسلیم شده است

چہ دایرۂ مرتسم شاھد حال است ۔
لھذا در مثلثین (س د ط) و (س د ص) زاویۂ (س د ط) اعظم است از زاویۂ (س د ص)
لھذا قاعدۂ (س ط) اطول است نسبت بقاعدۂ (س ص)
در اینصورت نقطۂ (ص) فوق (س ط) واقعشدہ است ۔
واما در مثلثین (س د ع) و (س د ط) زاویۂ (س د ع) اعظم است از زاویۂ (س د ط)
لھذا قاعدۂ (س ع) اطول است نسبت بقاعدۂ (س ط)
در اینصورت نقطۂ (ط) کہ جای (ص) را گرفتہ است روی خط واقع شدہ است
واما در مثلثین (س د ق) و (س د ع) خود قیاس کن ۔
لھذا ھرگاہ در دو مثلث ضلعین یک مثلث الخ

شکل (۲۵) اثباتی

ھرگاہ در دو مثلث ضلعین یک مثلث متساوی باشند با ضلعین مثلث دیگر موافق نظیر خود وقاعدۂ یک مثلث اطول باشد نسبت بقاعدۂ مثلث دیگر پس زاویۂ وسطی ضلعین مثلثی کہ قاعدہ اش اطول است اعظم خواھد بود نسبت بضلعین مثلث دیگر کہ قاعدہ اش اقصر است

فرض کن (ا ب ج) و (د س ص) دو مثلث اند

وضلعین یک مثلث (ا ب) و (ا ج) متساویند با ضلعین (د س) و (د ص) متوافق با نظائر خود

یعنی (ا ب) برابر است با (د س) و (ا ج) با (د ص)

لکن قاعدۂ (ب ج) اطول است از قاعدۂ (س ص)

لھذا زاویۂ (ب ا ج) اعظم است از زاویۂ (س د ص)

ثبوت = بدلیل اینکه هرگاه زاویهٔ ب اج بزرگ نباشد از زاویهٔ س دص

لازم میآید که مساوی باشد یا اینکه کوچك باشد نسبت بزاویهٔ (س د ص)

لکن زاویهٔ (ب اج) مساوی نیست با زاویهٔ (س د ص) ...

زیرا که هرگاه چنین باشد

پس (بحکم ش ۲۴) میباید قاعدهٔ ب ج مساوی باشد با قاعدهٔ (ص س)

وحال آنکه (بموجب مفروض) چنین نیست) ـ

وکذالك کوچك هم نیست چه هرگاه کوچك باشد

پس (بحکم ش ۲۴) می باید قاعدهٔ (ب ج) اقصر باشد از قاعدهٔ (س ص)

ولکن (بموجب مفروض) چنین است) ـ

یعنی زاویهٔ (ب اج) کوچك نباشد نسبت بزاویهٔ (س د ص)

و در فوق ثابت شد که زاویهٔ (ب اج) مساوی هم نیست با زاویهٔ (س د ص)

پس زاویهٔ (ب اج) اعظم است از زاویهٔ (س د ص) ـ

لهذا هرگاه در دو مثلث ضلعین الخ

تفهیم = نسبت شکل (۲۴) با شکل (۲۵) همانست که شکل پنجم و ششم را باهم) ـ

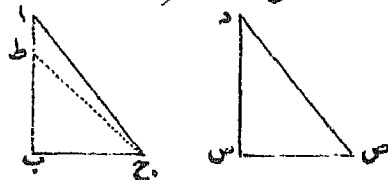
مشق

(۱) هرگاه از راس مثلث (ا ب ج) تا نقطهٔ وسط قاعدهٔ (ب ج) خط (ا ط) کشیده شود ثابت کن که متشکل شدن زاویهٔ (ا ط ب) منفرجه یا حاده موقوف است باطول یا اقصر بودن (ا ب) نسبت با (ا ج) ـ

(۲) در شکل ذو اربعة الاضلاع (ا ب ج د) هرگاه (ا ب) مساوی (د ج) باشد ولکن (ب ج) (ا ج) اطول باشد نسبت به (د ب)

ثابت کن که زاویهٔ (ا ب د) کوچك است نسبت بزاویهٔ (ب د ج) و زاویهٔ (ب اج) اعظم است نسبت بزاویهٔ (ا ج د)

شکل (۲۶) اثباتی

هرگاه در دو مثلّث زاویتین یك مثلّث مساوی باشند با زاویتین مثلّثِ دیگر موافق نظیر خود ویك ضلع یك مثلّث مساوی باشد بایك ضلع مثلّثِ دیگر واین ضلعین متساوی متّصل باشند بازوایا متساویین خواه مقابل درهردو صورت باقی ضلعین هرمثلّث علی التناظر متساوی خواهند بود وزاویهٔ سوّم ازیك مثلّث مساوی خواهد بود بازاویهٔ سوّم از مثلّثِ دیگر

فرض کن ا ب ج و د س ص دو مثلّثِ معلوم اند وزاویتین هریکی موافق نظیر خود متساویند

یعنی زاویهٔ ا ب ج برابراست بازاویهٔ د س ص وزاویهٔ ب ج ا برابر است بازاویهٔ س ص د

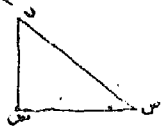
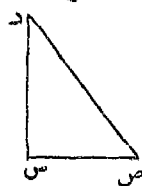
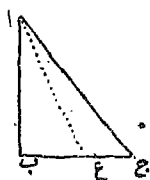
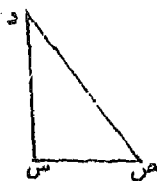
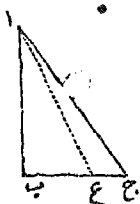
ویك ضلعِ مثلّث هم مساویست بایك ضلعِ مثلّث دیگر

(اوّل) چنین فرض نما کر این دو ضلعِ متساوی از دو مثلّث متّصلند بزوایای متساویه

یعنی ضلعِ (ب ج) مساویست با ضلعِ (س ص)

لهذا باقی ضلعین هرمثلّث علی التناظر باهم متساوی خواهند بود

یعنی (ا ب) برابر با (د س) و (ا ج) برابر با (د ص)

وزاویۂ سوم یعنی (ب اج) مساوی خواهد بود بازاویۂ (س د ص)
درصورتیکہ (اب) برابرِ (دس) نباشد
پس میباید یکی از اینها از دیگری اطول باشد)۔
هرگاه ممکن است تصور نما کہ (اب) اطول است نسبت با (دس)
وضع شکل = (بحکم ش ۳) قطع کن (ب ط) را مساوی (س د)
وصل کن (ج ط)
ثبوت = پس درمثلثینِ (ط ب ج) و (د س ص) ضلعِ (ط ب)
مساوی (دس) خارج شده است)۔
و (بموجب مفروض) (ب ج) مساوی (س ص) است
لهذا ضلعینِ (ط ب) و (ب ج) مساویند با ضلعین (د س) و (س ص)
موافق نظیر خود
وزاویۂ (ط ب ج) مساوی بازاویۂ (د س ص)
لهذا (بحکم ش ۴) مثلثینِ (ط ب ج) و (د س ص) باهم متساویند
وزوایا کہ مقابل اضلاع متساویہ واقعند هریکی با نظیر خود متساوی
دراینصورت زاویۂ (ط ج ب) برابر شد بازاویۂ (د ص س)
لکن (بموجب مفروض) زاویۂ (د ص س) مساوی است بازاویۂ (ا ج ب)
پس (بحکم علم ۱) (ط ج ب) هم مساوی شد بازاویۂ (ا ج ب)
یعنی زاویۂ کوچک مساوی زاویۂ بزرگ
واین اثبات غیر ممکن است کہ جزو مساوی کل باشد)۔

لهذا ثابت شد که (اب) و (دس) غیر متساوی نباشند ۔
یعنی باهم متساویند ۔
و (بموجب مفروض) (بج) بمساوی (سص) است ۔
لهذا ضلعین (اب) و (بج) مساویند با ضلعین (دس) و (سص) موافق نظیر خود ۔
ایضاً (بموجب مفروض) زاویۂ (ابج) مساویست با زاویۂ (دسص)
لهذا (بحکم شکل ۴) قاعدۂ (اج) برابراست با قاعدۂ (دص)
و زاویۂ سوم یعنی (باج) مساویست با زاویۂ (سدص)
(دوم) چنین فرض نما که این دو ضلع متساوی از دو مثلث مقابل بزوایای متساویه

یعنی (اب) مساویست با (دس)
درین صورت هم باقی ضلعین هر مثلث علی التناظر باهم متساوی خواهند بود
یعنی (اج) بمساوی (دص) و (بج) بمساوی (سص)
و زاویۂ سوم یعنی (باج) برابر زاویۂ (سدص) خواهد بود ۔
درصورتیکه (بج) بمساوی (سص) نباشد می باید یکی از اینها اطول باشد نسبت بدیگری ۔

تصوّر نما (ب ج) اطول است از (س ص)۔

وضع شکل = (بحکم ش ۳) (ب ع) را بمساوی (س ص) قطع کن و وصل کن (ا ع) را۔

ثبوت = در مثلثین (ا ب ج) و (د س ص) چونکه (ب ع) بمساوی (س ص) مرتسم شده است

لهذا ضلعین (ا ب) و (ب ع) مساویند با ضلعین (د س) و (س ص) موافق نظیر خود۔

و زاویهٔ (ا ب ع) برابر است با زاویهٔ (د س ص)

لهذا (بحکم ش ۴) مثلث (ا ب ع) برابر است با مثلث (د س ص)

لا بدّ مقابل اضلاع متساویه زوایا باهم متساویند هر یکی موافق نظیر خود

بنابراین زاویهٔ (ب ع ا) مساویست با زاویهٔ (س ص د)

لکن (بموجب مفروض) زاویهٔ (س ص د) مساویست با زاویهٔ (ب ج ا)

پس (بحکم ع ۱) (ب ع ا) برابر است با زاویهٔ (ب ج ا)۔

یعنی در مثلث (ا ع ج) زاویهٔ خارجه (ب ع ا) مساوی باشد با زاویهٔ داخله (ب ج ا) که در مقابل واقع شده است۔

و لکن (بحکم ش ۱٦) اثبات این تصوّر غیر ممکن است۔

ازاین جهت ثابت شد که (ب ج) و (س ص) غیر متساوی نباشند)۔
یعنی باهم متساویند)۔
و (بموجب مفروض) (ا ب) مساویست با (د س)
لهذا ضلعین (ا ب) و (ب ج) برابرند با ضلعین (د س) و (س ص)
موافق نظیر خود)۔
ایضًا (بموجب مفروض) زاویۂ وسطیِّ (ا ب ج) مساویست با زاویۂ
وسطی (د س ص)
پس (بحکم ش ۴) قاعدۂ (ا ج) برابراست با قاعدۂ (د ص)۔
وزاویۂ سوّم یعنی (ب ا ج) مساویست با زاویۂ سوّم (س د ص)
لهذا هر دو مثلث زاویتین الخ (در هر دو صورت انطباق واقع شود)

تفهیم = در اقلیدس از شکل اوّل تا شکل ۲٦ فصلی است علی حدّه
ودر این فصل نتائج عظیمه را در شکل ۴ ــ ٦ ــ و ۲٦ بیان کرده است
ملخّص آن اینست که هرگاه سه جزو یک مثلث (بترتیبیکه در مباحث آن اشکال
مذکوراست) مساوی باشند با سه جزو مثلث دیگر متوافق با نظائر خود
پس هر دو مثلث باهم متساوی خواهند بود)۔
یعنی بریکدیگر منطبق خواهند شد)۔
ومراد از جزو مثلث زاویه است یا ضلع آن)۔
امّا هرگاه رعایت ترتیب ملحوظ نباشد ممکن است سه زاویۂ مثلثی علی التناظر مساوی
باشند با سه زاویۂ مثلث دیگر وحال آنکه سطوح آنها باهم متساوی نباشند چنانکه بعد از
این در محل خود مذکور شود)۔
ونیز ممکن است دو ضلع و یک زاویۂ مثلثی علی التناظر مساوی باشند با دو ضلع و یک
زاویۂ مثلث دیگر و هر دو مثلث باهم متساوی نباشند)۔
یعنی منطبق نشوند چنانچه از این شکل توان دریافت

(اوّل)

ا ، س ، ط ، ج ، ب ، ص

(اوّل)

مثلاً در دو مثلّث (ا ب ج) و (ا د س) ضلع (ا ب) یا (ا ص) منقوطه مساویست با ضلع (ا د) و ضلع (ا ج) مساویست با ضلع (ا س)
و زاویهٔ (ا ج ب) (در صورتیکه فرض شود قاعدهٔ (س د) مساویست با قاعدهٔ (ج ص) بمساوی زاویهٔ (ا س د) است
یعنی سه جزو یک مثلّث مساویند با سه جزو مثلّث دیگر موافق نظیر خود
معذالک مثلثین باهم متساوی نباشند ؛
ولکن در بعضی حالات انطباق اشکال واقع شود
لهذا ذکر آن برای بصیرت مستدیان انسب مینماید
و از این اشکال استفاده توان نمود ؛

(دوم)

زاویهٔ قائمه　　زاویهٔ منفرجه　　زاویهٔ حاده

هرگاه دو ضلع و یک زاویهٔ مثلثی مساوی باشد با دو ضلع و یک زاویهٔ مثلّث دیگر موافق نظیر خود
و این زاویهٔ قائمه باشد منفرجه باشد یا حادّه در هر سه صورت مثلّثین باهم متساوی خواهند بود
مثلاً هرگاه ضلعین (ا ب) و (ا ج) مساوی باشند با ضلعین (ا د) و (ا س) موافق نظیر خود
و زاویهٔ معلومهٔ (ب) مساوی باشد با زاویهٔ (د)
پس هر دو مثلّث باهم متساوی خواهند بود ؛
یعنی منطبق خواهند شد ؛
استنباط این اشکال محوّل است بور زش افکار مبتدیان ؛
ولکن این دو مطلب را اجمالاً بحافظهٔ خود باید سپرد ؛
(اوّل) هرگاه ضلعین یک مثلّث علی التناظر متساوی باشند با ضلعین مثلّث دیگر
و زوایای متشکلهٔ این زوجین نیز باهم متساوی باشند

پس ضلع سوّم و باقی زوایای هر دو مثلث باہم متساوی خواهند بود)۔
یعنی انطباق واقع شود (این مطلب عکس شکل ۲۶ میباشد)

(دوم) هرگاه ضلعین یک مثلث علی الترتیب متساوی باشند با ضلعین مثلث دیگر
ولکن زوایائے محصورۂ زوجین مذکور باہم متساوی نباشند
پس ضلع سوّم و (در یک حالتی) باقی زوایائے هر دو مثلث باہم غیر متساوی خواهند بود
یعنی انطباق واقع نخواهد شد)۔
مراد از حالتی اینست کہ هر شش زاویۂ مثلثین باہم متساوی نباشند۔
ببین در شکل اول مثلثین (ا س ط) و (ا ج ب)

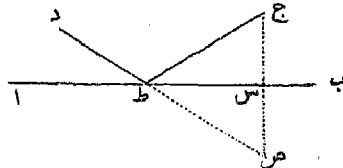
مشق

(۱) در مثلث متساوی الساقین (ا ب ج) هرگاه زاویتین قاعدۂ (ب ج) را بخطوط (ب د) و (ج س) تنصیف نموده با اضلاع مقابل در نقطۂ (د) و (س) موصول شوند)۔
ثابت کن مثلث (س ب ج) و (د ج ب) باہم متساوی اند

(۲) از اطراف قاعدۂ مثلث متساوی الساقین عمائد یکہ بر ضلعین مقابل خارج شوند باہم متساوی خواهند بود)۔

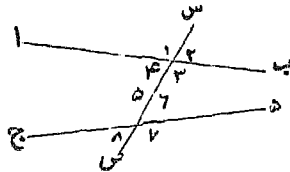
(۳) خطیکہ تنصیف کند زاویہ را فاصلۂ هر نقطۂ آن با اضلاع طرفین متساوی خواهد بود)۔

(۴) در خط (ا ب) از نقطۂ وسط (ج) خط مستقیمی خارج شدہ است
و از نقطۂ (ا) و (ب) عمائد (ا د) و (ب س) بر آن قائم میباشند
ثابت کن (ا د) مساوے (ب س) است)۔

(۵) در یک جانب خط مستقیمی از دو نقاط معلوم دو خط مستقیم چنان خارج کن کہ بخط مستقیم معلوم باہم اتصال نموده تشکیل زوایای متساوی نمایند)۔

فرض کن (ا ب) خط مستقیم معلوم (ج) و (د) نقاط معلوم
مقصود اینست کہ از نقاط مذکوره دو خط مستقیم قسمی خارج شوند کہ تمائل آنها نسبت با (ا ب) مثل هم باشد)۔
وضع شکل = قایم کن بر (ا ب) عمود (ج س) را و خارج ساز از آن تا نقطۂ (ص)
قسمیکہ (ص س) مساوی (ج س) باشد)۔
وصل کن (د ص) را کہ بر نقطۂ (ط) باہم موصول شوند)۔
ایضاً وصل کن (ج ط) را)۔
پس (ج ط) و (ط د) خطوط مطلوبہ خواهند بود)
(ثابت کن بدلیل) معلوم

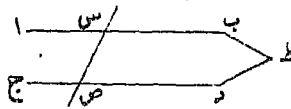
(۶) در یک خط مستقیم معلوم نقطۂ معین کن کہ فاصلۂ آن متساوی باشد با دو خط صفا
بیان کن در چہ صورتی این دعوی غیر ممکن خواهد بود)۔

(۷) از نقطهٔ معلوم در خطِ مستقیمی خارج کن که چون از دو نقطهٔ مفروضه بران دو عمود قائم شود باهم متساوی باشند)۔
ظاهر کن در چه صورتی این دعوی ممکن نباشد)۔

حد = خطوطِ مستقیم متوازی آن خطوط را گویند که از دو جانب خود هر قدر ممتد شوند باهم اتصال و تقاطع ننمایند

تعریف = چون دو خطِ مستقیم (اب) و (ج د) را خطِ مستقیم دیگر مثلاً (س ص) قطع کند
و از آن تقاطع زوایا حادث شوند هر یکی از آن زوایا را جهت امتیاز باسمی خاص موسوم سازند)۔
مثلاً ۱ ـ ۲ ـ ۷ ـ ۸ را زوایای خارجه گویند)۔
و ۳ ـ ۴ ـ ۵ ـ ۶ را زوایای داخله خوانند)۔
ایضاً هر یکی از ۴ ـ ۶ و ۳ ـ ۵ را زاویهٔ متبادله گویند)۔
و امّا در یک سمت (س ص) زاویهٔ (۲) را خارجه و (۶) را نسبت بآن زاویهٔ داخلهٔ مقابل گویند)۔
و گاهی ۲ و ۶ و نیز ۱ ـ ۵ و ۷ ـ ۳ و ۸ ـ ۴ را متناظر گویند
پس (بحکم علم ۱۲) هر گاه مجموعهٔ زاویتین (۳) و (۵) نسبت بدو قائمه کمتر باشد

قطعاً (اب) و (ج د) بعد از امتدادِ بے ہم در یک نقطۂ باہم وصل خواہند شد ۔

شکل (۲۷) اثباتی

ہرگاہ بر دو خطِ مستقیم خطِ مستقیم دیگر واقع شود و زوایا متبادلہ وا متساوی تشکیل نماید پس (اب) و (ج د) خطِ مستقیم باہم متساوی خواہند بود

فرض کن (اب) و (ج د) را کہ دو خطِ مستقیم اند

خطِ مستقیم (س ص) در نقطۂ (س) و (ص) قطع نمودہ زوایا متبادلہ (اس ص) و (س ص د) را باہم متساوی تشکیل دادہ است ۔

لهذا (اب) متوازی (ج د) خواہد بود ۔

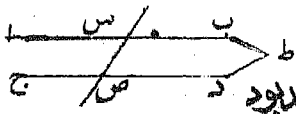
ثبوت = زیراکہ ہرگاہ (اب) متوازی (ج د) نباشد لابد در یک نقطہ پس از امتدادِ بے ہم باہم وصل خواہند شد ۔

یعنی بسمتِ (ب) و (د) یا بسمتِ (ا) و (ج) اتصال پیدا کنند ۔

ہرگاہ ممکن است تصور نما کہ (اب) و (ج د) پس از امتداد متواتر بطرفِ (ب) و (د) در نقطۂ (ط) موصول شدہ اند ۔

در اینصورت (ط س ص) مثلثے میباشد ۔

پس (بحکم ش ۱۶) زاویۂ خارجہ یعنی (اس ص) نسبت بزاویۂ داخلہ

(س ص ط)

کہ مقابل واقع شدہ است اعظم خواهد بود

ولکن (بموجب مفروض) زاویۂ (ا س ص) برابر است با زاویۂ (س ص ط)

بنابراین هر دو حالت را دارا شد واین غیر ممکن است)۔

لهذا ازاین ثابت شد کہ (ب ا) و (ج د) از طرفِ (ب) و (د) پس از امتداد در هیچ نقطۂ وصل نخواهند شد)۔

وهمین طور ثابت توان نمود کہ از طرفِ (ا) و (ج) هم بعد از امتداد در هیچ جائی وصل نخواهند شد)۔

و (بحکم حد ۳۵) خطوطِ مستقیمہ کہ از هر دو طرف باستقامت ممتد شوند و در هیچ جائی اتصال پیدا نکنند و تقاطع ننمایند آنرا خطوطِ متوازیہ نامند)۔

پس خط (ا ب) و (س د) با هم متوازی میباشند)۔

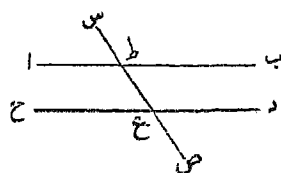
لهذا هرگاه بر دو خطِ مستقیم خطِ مستقیمِ دیگر واقع شود الخ

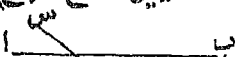
تفهیم

(۱) عمائد ایکہ بر خط مستقیم قائم شوند با هم متوازی میباشند)۔
(۲) هرگاه زوایای شکل ذوار بعۃ الاضلاع قائمہ باشند آن شکل متوازی الاضلاع خواهد بود
(۳) هرگاه در ذوار بعۃ الاضلاع اضلاعِ متقابلہ متوازی باشند آن شکل متوازی الاضلاع خواهد بود)۔
(۴) خطوطیکہ منصّف زوایای متبادلہ متساویہ باشند متوازی خواهند بود)۔
(۵) شکل معیّن وشبہ بالمعیّن هر دو متوازی الاضلاع میباشند)۔

شکل (۲۸) اثباتی

هرگاه بر خطِ مستقیم خطِ مستقیم دیگر واقع شود و در یک سمت

خود زاویهٔ خارجه را بمساوی زاویهٔ داخله که مقابل است پیدا کند یا اینکه
در یک سمتِ خود دو زاویهٔ داخله باهم بمساوی دو قائمه تشکیل نماید پس
دو خطِ مستقیمِ مذکوره باهم متوازی خواهند بود

فرض کن دو خطِ مستقیم (ا ب) و (ج د) را خطِ مستقیم (س ص) در نقطهٔ
(ط) و (ع) قطع نموده است
و در یک سمتِ خود زاویهٔ خارجه (س ط ب) را بمساوی زاویهٔ داخله (ط ع د)
که در مقابل واقع شده پیدا کرده است —
یا اینکه در یک سمتِ خود دو زاویهٔ داخله
یعنی (ب ط ع) و (ط ع د) باهم بمساوی دو قائمه پیدا کرده است
در هر دو صورت خطِ مستقیم (ا ب) متوازی (ج د) خواهد بود —
ثبوت = چونکه (بموجب مفروض) زاویهٔ (س ط ب) مساویست
با زاویهٔ (ط ع د)
و (بحکم شـ ۱۵) زاویهٔ (س ط ب) مساویست با زاویهٔ (ا ط ع)
لهذا (بحکم علم ۱) زاویهٔ (ا ط ع) مساویست با زاویهٔ (ط ع د)
و این زوایا متبادله اند —
پس (بحکم شـ ۲۷) (ا ب) و (ج د) باهم متوازی میباشند —

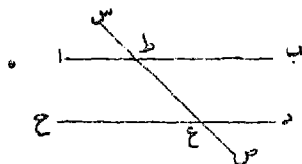
وچون (بموجب مفروض) زاویتین (ب طع) و (طع د) باهم بمساوی دو قائمه اند
و (بحکم ش ۱۳) زاویتین (اطع) و (ب طع) نیز باهم بمساوی دو قائمه میباشند
پس (بحکم علم ۱) زاویتین (ب طع) و (طع د) بمساوی زاویتین (اطع) و (ب طع)
میباشند؛

زیرا که هر صورتی بذات خود دو قائمه است

از هر یکی از این متساویات ساقط کن زاویهٔ مشترکهٔ (ب طع) را
پس (بحکم علم ۳) باقی زاویهٔ (اطع) مساوی باشد با باقی زاویهٔ (طع د)
واین زوایا متبادله اند؛

بنا بر این (بحکم ش ۲۷) (اب) با (ج د) متوازی میباشند؛

لهذا هرگاه بر دو خط مستقیم الخ

شکل (۲۹) اثباتی

هرگاه بر دو خط مستقیم متوازی خط مستقیم دیگر واقع شود زوایا
متبادلهٔ آن باهم متساوی خواهند بود و در یک سمت آن زاویهٔ داخله
وخارجه که متناظرند باهم متساوی خواهند بود و نیز در یک سمت
دو زاویهٔ داخله باهم بمساوی دو قائمه خواهند بود

فرض کن (اب) و (ج د) دو خط مستقیم متوازیند و خط مستقیم

(س ص) بآن واقع شده است ۔

لهذا شرائط ثلاثهٔ ذیل دران یافت خواهد شد ۔

اوّل = دو زاویهٔ متبادلهٔ (ا ط ع) و (ط ع د) باهم متساوی خواهند بود ۔

دوّم = زاویهٔ خارجهٔ (س ط ب) با زاویهٔ داخلهٔ (ط ع د) که مقابلهٔ واقع شده مساوی خواهد بود ۔

سوّم = دو یك سمت آن دو زاویهٔ داخلهٔ (ب ط ع) و (ط ع د) باهم بمساوی دو قائمه خواهند بود ۔

ثبوت = بدلیل آنکه هرگاه زاویهٔ (ا ط ع) بمساوی (ط ع د) نباشد

لابد یکی از آنها اعظم خواهد بود نسبت بدیگری ۔

درصورت امکان تصور نما زاویهٔ (ا ط ع) اعظمست از زاویهٔ (ط ع د)

بیفزای بهر یکی از این غیر متساویات زاویهٔ (ب ط ع) را

لهذا مجموعهٔ زاویتین (ا ط ع) و (ب ط ع) زیاده است

نسبت بزاویتین (ب ط ع) و (ط ع د)

ولکن (بحکم ش ۱۳) مجموعهٔ زاویتین (ا ط ع) و (ب ط ع) بمساوی

دو قائمه میباشد ۔

بنابراین زاویتین (ب ط ع) و (ط ع د) نسبت بدو قائمه کمتر خواهد بود

لهذا (بحکم علم ۱۲) هرگاه خط (ا ب) و (ج د) پیهم ممتد شود

در یك نقطهٔ بطرف (ب) و (د) اتصال خواهند نمود

ولکن خطین مذکوره پس از امتداد کاهی متصل نخواهند شد

زیرا که (بموجب مفروض) متوازی میباشند ¤

لهذا زاویهٔ (اطع) با زاویهٔ (طعد) غیر مساوی نباشد ¤

یعنی باهم متساویند ¤

لکن (بحکم شر ۱۵) زاویهٔ (اطع) مساویست با زاویهٔ (س ط ب)

لهذا (بحکم علم ۱) زاویهٔ (س ط ب) مساویست با زاویهٔ (طعد) ¤

بیفزای بر هر یکی از این متساویات زاویهٔ (ب طع) را

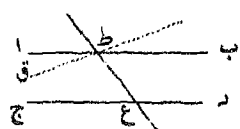
پس (بحکم علم ۲) مجموعهٔ زاویتین (س ط ب) و (ب طع)

مساویست با زاویتین (ب طع) و (طع د)

ولکن (بحکم شر ۱۳) زاویتین (س ط ب) و (ب طع) برابر دو قائمه اند

بنابراین (بحکم علم ۱) (ب طع) و (طع د) بمساوی دو قائمه میباشند

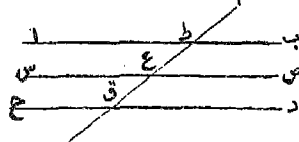
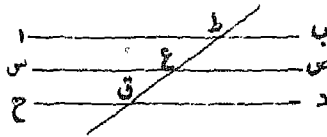
لهذا هرگاه بر دو خط مستقیم متوازی خط مستقیم الخ

بعضی از مهندسین شکل (۲۹) را این قسم ثابت کنند
(علوم متعارفه — دو خط مستقیم متقاطع بمعیت با خط مستقیم ثالث متوازی نشوند)

مثلاً هرگاه زاویهٔ (اطع) بمساوی (طعد) نباشد
پس باید یکی از آنها اعظم باشد نسبت به یکری ¤
تصور کن (اطع) اعظم است از زاویهٔ (طع د)
(بحکم شر ۲۳) در نقطهٔ (ط) بساز زاویهٔ (ع ط ق) را بمساوی زاویهٔ (طع د) که متبادله باشد
پس (بحکم شر ۲۷) (ق ط) و (ج د) متوازیند
لکن (بموجب مفروض) اب و ج د متوازیند ¤
بنابراین دو خط متقاطع (اط) و (ق ط) متوازی باشند با (ج د)

ولکن

ولکن بحکم اینکہ دو خطِ مستقیم متقاطع بمعیّت با خطِ مستقیم ثالث متوازی نشوند
این امر غیر ممکن است
لهذا زاویۂ (اطع) با زاویۂ (طع د) غیر مساوی نباشد۔
یعنی هر دو باهم متساوی‌اند۔
نتیجۂ قسمت ثانی و ثالث شکل را توان باسلوب مبحث دریافت
حاشیہ = بدانکہ در علم هندسہ مسئلۂ دشوارتر از مسئلۂ خطوطِ متوازیہ نیست۔
مهندسین برای انحلال مشکلات آن سعیها نموده و خواسته‌اند کہ جهت تفهیم
مطلب طریقی پیدا کنند کہ نسبت با قلیدس اسهل باشد
ولکن در نظر اساتید دقائق بین پیداست کہ آن دقتها مرفوع نشده‌اند۔
برعایت اختصار درین موجز ذکر آن مطالب صرفِ نظر شد۔

شکل (۳۰) اثباتی

خطوطِ مستقیمہ کہ متوازی باشند با یک خطِ مستقیم
آن خطوط باهم متوازی خواهند بود

فرض کن از خطین (اب) و (ج د) هر یکی متوازی است با (س ص)
پس (اب) متوازی (ج د) خواهد بود
وضع شکل = چنان تصوّر نما کہ خطِ مستقیم (ط ق)
خطوطِ مستقیمہ (اب) و (س ص) و (ج د) را در نقاط (ق)
و (ع) و (ط) قطع میکند۔
ثبوت = چونکہ دو خطِ مستقیم متوازی را یعنی (اب) و (س ص) را
خطِ (ط ق) قطع میکند
لهذا بحکم شرط (۲۹) زاویۂ (اطع) مساوی است با زاویۂ متبادلۂ (طع ص)

ایضاً چونکہ خطوطِ متوازیہ (س ص) و (ج د) را خطِ مستقیم (ط ق) قطع میکنند

لهذا (بحکم ش ۲۹) زاویۂ (ط ع ص) مساویست بازاویۂ (ط ق د)

واما در فوق ثابت شد کہ زاویۂ (ا ط ع) مساویست بازاویۂ (ط ع ص)

لهذا (بحکم علم ۱) زاویۂ (ا ط ع) برابر شد بازاویۂ (ط ق د)

واین زوایا متبادلہ میباشند)

بنابراین (بحکم ش ۲۷) اب متوازیِ (ج د) میباشد)

لهذا خطوطِ مستقیمۂ کہ متوازی باشند الخ

مشق

(۱) هرگاه خطِ مستقیمی بر خطوطِ متوازیہ واقع شود و بر یکی از این خطوط عمود باشد بر باقی خطوطِ متوازیہ نیز عمود خواهد بود)

(۲) هرگاه ضلعینِ یک زاویہ موافقِ نظیر خود با ضلعینِ زاویۂ دیگر متوازی باشند پس آن زوایا باهم متساوی خواهند بود)

(۳) شکل (۲۸) را از استعانتِ شکلِ (۲۷) ثابت کن)

(۴) حصص عائد یکہ میانِ خطوطِ متوازیہ واقع شوند باهم متساوی میباشند)

(۵) هرگاه (ا ج د) و (ب ج د) دو زاویۂ متصلہ باشند و خطی هم متوازیِ (ا ب) واقع باشد پس خطوطیکہ تنصیفِ این زوایا میکنند بر نا صلہ متساوے از خطِ (ج د) با آن خطِ متوازے وصل خواهند شد)

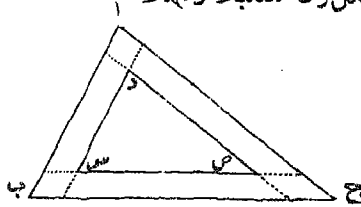
(۶) هرگاه میان دو خطِ متوازی خطِ مستقیمی واقع شود و از نقطۂ (د) کہ وسطِ آن خط است خطی قاطع خارج شود پس مقدارِ خطِ قاطع کہ مابینِ خطوطِ متوازیہ واقع شده است در نقطۂ (د) تنصیف خواهد شد)

(۷) از دو خطِ متوازی نقطۂ بر فاصلۂ متساوی واقع شده است

پس خطوطِ مستقیمهٔ که از دو آن نقطه یکذرند ما بین آنها حصص متوازیات باهم متساوی خواهند بود

(۸) در مثلث متساوی الاضلاع چون دو خطِ متوازی با دو ضلع آن از نقطهٔ وسطِ ضلع سوم یا از هر نقطهٔ از ضلع سوم خارج شوند از خروج آن متوازی الاضلاعیکه مرتسم گردد مجموعهٔ اضلاع آن دو چند یك ضلع مثلث خواهد بود

(۹) سطح هر مثلث متساوی الاضلاع را بجایش چهار مثلث متساوی الاضلاع میباشد که هر ساقی از این مثلثات بمساوی نصف ساق مثلث محیط خواهد بود ؎ ظ

تفهیم = از مشق دوم این معنی هم مستفاد میشود که ممکن است سه زاویهٔ مثلثی علی التنا متساوی باشند با سه زاویهٔ مثلث دیگر و سطوح آنها باهم متساوی نباشد چنانچه از این شکل توان استنباط نمود ؎

مثلاً در مثلثین (ا ب ج) و (د س ص) ضلعین (ا ب) و (ا ج) با ضلعین (د س) و (د ص) متوازیند ؎

و نیز ضلع (ب ج) با (س ص) متوازی میباشد

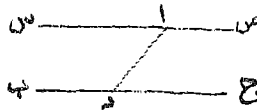
یعنی سه ضلع یك مثلث با سه ضلع مثلث دیگر علی التناظر متوازیند

و نیز سه زاویهٔ یك مثلث با سه زاویهٔ مثلث دیگر موافق نظیر خود متساوی میباشند

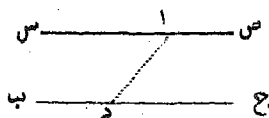
ولکن سطوح آنها باهم متساوی نباشند ؎

بیین. مشق سوم از (ش ۸) و بحکم (ش ۱۵) ثابت کن دعوی را ؎

شکل (۳۱) عملی

از نقطهٔ مفروضه خارج کن خطِ مستقیمیکه متوازی باشد باخطِ مستقیم مفروض

فرض کن (ا) نقطهٔ مفروضه و (ب ج) خطِ مستقیم مفروض

مراد اینست که از نقطهٔ (ا) خطِ مستقیمی خارج شود که متوازی باشد با خطِ

ص ـــــــ ا ـــــــ س
ج ـــــــ د ـــــــ ب

مستقیم (ب ج)
وضع شکل = در (ب ج) معیّن کن نقطهٔ مثلاً (د)
وصل کن (ا د) را
و بحکم (شر ۲۳) در خط مستقیم (ا د) و سمت مقابل آن رسم کن زاویهٔ (د ا س) را
که مساوی باشد با زاویهٔ (ا د ج)
خارج کن خط مستقیم (س) را تا نقطهٔ (ص)
لهذا (س ص) با (ب ج) متوازی خواهد بود۔
ثبوت = زیراکه خط مستقیم (ا د) بر دو خط مستقیم (ب ج) و (س ص) واقع شده است
و زوایای متبادلهٔ (س ا د) و (ا د ج) را متساوی احداث نموده
بنابراین (بحکم شر ۲۷) خط (س ص) با (ب ج) متوازی میباشد۔
لهذا از نقطهٔ مفروضهٔ (ا) خط مستقیم (س ا ص) متوازی با خط مستقیم مفروض (ب ج) مرتسم گردید و مراد همین بوده۔

مشق
(۱) خطیکه متوازی قاعدهٔ مثلث متساوی الساقین خارج شود با اضلاع خود زوایای متساویه پیدا خواهد نمود۔

(۲) خطیکه منصّف زاویه باشد از هر نقطهٔ آن چون خطی متوازی با یکی از ضلعین آن کشیده شود واز آن مثلثی متشکل گردد آن مثلث متساوی الساقین خواهد بود).

(۳) از یک نقطهٔ خط مستقیمی چنان خارج کن که با یک خط مستقیم معلوم زاویهٔ مساوی زاویهٔ معلومه پیدا کند).

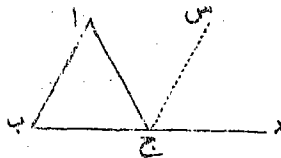
(۴) در مثلث متساوی الساقین (ا ب ج) از یک نقطهٔ (د) خط مستقیمیکه با (ب ج) قائمه پیدا میکند خارج شده است
و(ا ب) را در نقطهٔ (س) و(ا ج) ممدوده را در نقطهٔ (ص) قطع میکند
ثابت کن که مثلث (ا س ص) متساوی الساقین است).

(۵) خطیکه تنصیف کند زاویهٔ خارجهٔ مثلث را هرگاه با ضلع مقابل متوازی واقع شود آن مثلث متساوی الساقین خواهد بود).

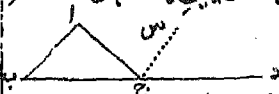
(۶) خط مستقیم معلوم را تثلیث کن =
بر (ا ب) بساز مثلث متساوی الاضلاع را
زاویهٔ (ا) و(ب) را بخطوط (ا د) و(ب د) تنصیف کن که بر (د) موصول شوند
از نقطهٔ (د) خارج کن خطوط (د س) و(د ص) را
قسمیکه متوازی باشند با (ا ج) و(ب ج)
پس (س) و(ص) نقاط تثلیث (ا ب) خواهند بود).

(۷) پیدا کن نقطهٔ وسط مثلث متساوی الاضلاع را).

شکل (۳۲) اثباتی

هرگاه ضلع مثلثی ممتد شود زاویهٔ خارجه که از آن تشکیل یابد مساوی دو زاویهٔ داخله که در مقابل آن واقع شده اند میباشد
ومجموعهٔ زوایای مثلث مساوی دو قائمه میباشند —
(این قاعدهٔ کلیه را بذهن خود بسپار)

فرض کن (ا ب ج) مثلث وضلع (ب ج) تا نقطهٔ (د) خارج شده است).

لهذا زاویهٔ خارجهٔ (اج د) مساوی خواهد بود با زاویتینِ مقابل که داخله اند

یعنی زاویهٔ (ج اب) و (ابج) ٭

وهر سه زاویهٔ داخلهٔ مثلث بمساویِ دو قائمه میباشند ٭

یعنی زاویهٔ (ابج) و (بج ا) و (ج اب) برابرِ دو قائمه اند ٭

وضع شکل = (بحکم ش ۳۱) از نقطهٔ (ج) خارج کن خطِ (ج س) را

که متوازی باشد باخطِ (ب ا)

ثبوت = چون (اب) متوازیِ (ج س) است و (اج) بران واقع میشود

لهذا (بحکم ش ۲۹) دو زاویهٔ متبادلهٔ (اج س) و (ب اج) باهم متساویند

ایضاً چونکه (اب) متوازیِ (ج س) است و خطِ (ب د) بران واقع شد

لهذا (بحکم ش ۲۹) زاویهٔ خارجهٔ (س ج د) مساویست بازاویهٔ

داخلهٔ (ابج) که مقابل واقع شده است ٭

و در فوق ثابت شد که زاویتینِ (اج س) و (ب اج) باهم متساویند

لهذا (بحکم علم ۲) تمام زاویهٔ خارجهٔ (اج د) بمساویِ دو زاویهٔ داخلهٔ

(ج اب) و (ابج) که در مقابل واقع شده اند میباشد ٭

بر هر یکی ازین متساویات بیفزای زاویهٔ (اج ب) را

پس مجموعهٔ زاویتینِ (اج د) و (اج ب) بمساویِ سه زاویه

یعنی (ج اب) و (ب اج) و (اج ب) میباشد ٭

لکن (بحکم ش ۱۳) زاویتین (اج د) و (اج ب) بمساویِ دو قائمه میباشند

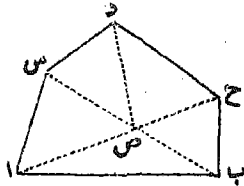
پس (بحکم علم ۱) مجموعهٔ زوایای ثلاثه

یعنی

یعنی (ج ب ا) و (ب اج) و (اج ب) بمساوی دو قائمہ میباشند)

لهذا هرگاه ضلع مثلثی ممتد شود الخ

نتائج

(۱) مجموعۂ زوایای داخلۂ هر شکل مستقیمۃ الاضلاع مع چهار قائمه که بران افزوده شود مساویست با قوائمی که عدد آن دو چند اعداد اضلاع آن شکل باشد

مثلاً هرگاه در شکل مستقیمۃ الاضلاع (ا ب ج د س) نقطۂ فرضاً (ص) معین نموده

گوشه های شکل را بخطوط مستقیمه وصل دهیم

پس شکل مذکوره منقسم خواهد شد در مثلثاتیکه عدد آن بقدر اضلاع شکل باشد

وچون (بحکم ش ۳۲) مجموعۂ زوایای داخلهٔ هر مثلث بمساوی دو قائمه میباشد

ونیز چونکه مثلثات شکل مذکوره بقدر اضلاع است

لهذا مجموعۂ کل زوایای داخلۂ مثلثات بقدر آن قوائم است

که عدد آنها دو چند اعداد اضلاع آن شکل باشد)

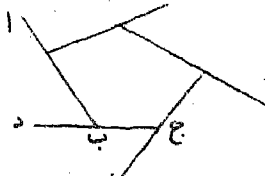
لکن این زوایای مذکوره شده مساوی اند با زوایای داخلۂ شکل مع آن زوایا که در نقطۂ (ص) متشکل شده اند

واما بحکم ش ۱۵ (ا) بر نقطۂ (ص) که راس مشترک هر مثلثات است

مجموعۂ کل زوایا بمساوی چهار قائمه میباشد)

لهذا مجموعۂ زوایای داخلۂ هر شکل الخ

(۲) مجموعۂ زوایای خارجۂ هر شکل مستقیمۃ الاضلاع بمساوی چهار قائمه میباشد)

چونکه (بحکم ش ۱۳) هر زاویۂ داخله مثلاً زاویۂ (ا ب ج) مع زاویۂ خارجۂ (ا ب د) که متصل است برابر با دو قائمه

لهذا مجموعۂ تمام زوایای داخله و تمام زوایای خارجه بمساوی آن قوائم است

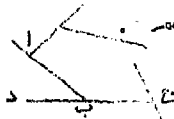
کہ عدد انہا مضاعف اعداد شکل مستقیم الاضلاع باشد)۔

واما بموجب نتیجهٔ اوّل مجموعه زوایای داخله مع چهار قائمه برابر است با ان قوائم که عدد انها دو چند اعداد اضلاع ان شکل باشد

پس (بحکم علم ۱) مجموعهٔ تمام زوایای داخله و خارجه بساوی مجموعهٔ کل زوایای داخله مع چهار قائمه میباشد

الهــر یکی ازاین متساویات ساقط کن زوایای داخله را

پس مجموعهٔ زوایای خارجه بساوی چهار قائمه میباشد)۔

لهــذا مجموعهٔ زوایای خارجه هر شکل الخ

تفهیم = این نتائج مفیده را بذهن خود بسپار =

(۱) هرگاه یك زاویهٔ مثلثی مساوی باشد با مجموعهٔ دو زاویهٔ دیگر پس ان زاویه قائمه خواهد بود)۔

(۲) هر زاویهٔ مثلث متساوی الاضلاع بساوی دو ثلث ($\frac{2}{3}$) یك قائمه میباشد یا اینکه بساوی یك ثلث ($\frac{1}{3}$) دو قائمه میباشد)۔

(۳) هرگاه در مثلث متساوی الساقین یك زاویه قائمه باشد پس هــر یکی از باقی زاویتین نصف قائمه خواهــد بود)۔

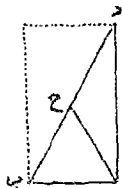
(۴) مجموعه دو زاویهٔ یك مثلث =

(اوّل) هرگاه برابر یك قائمه باشد پس زاویهٔ سوم قائمه خواهد بود واین مثلث را مثلث قائم الزاویه گویند)۔

(دوم) هــرگاه کمتر از یك قائمه باشد پس زاویهٔ سوم منفــرجه خواهد بود واین مثلث را مثلث منفرج الزاویه گویند)۔

(سوم) هــرگاه زیاده از یك قائمه باشــد پس زاویهٔ سوم حادّه خواهد بود) واین مثلث را مثلث حادة الزوایا نامند)۔

(۵) در مثلثی که دو زاویه معلوم باشد پس زاویهٔ سوم هــم معلوم خواهد بود)۔

نتائج فوق را ازاین شکل توان استنباط نمود

بساز برخط (اب) مثلث متساوی الاضلاع (ابج) را

خارج کن (بج) را تا نقطهٔ (د) قسمیکه (ج د) برابر باشد (بج) را

وصل کن (اد) را)۔

دراین صورت زاویهٔ (د اب) قائمه خواهد بود

زیرا که (بحکم شرح ۵) زاویهٔ (ج اد) مساویست با زاویهٔ (ج د ا)

وزاویۂ (ج اب) مساویست بازاویۂ (ج ب ا)
لهذا (بحکم علم ۲) زاویۂ (ب ا د) قائمه میباشد
پس (بحکم ش ۳۲) مجموعۂ دو زاویۂ دیگر
یعنی (اب د) و (ادب) برابر یك قائمه میباشد
باقی نتائج را خود ثابت کن

مشق

(۱) در مثلث حادّ الزوایا مجموعۂ دو زاویه بیشتر است نسبت بزاویه سوم ۔

(۲) هرگاه در مثلث (ا ب ج) ضلع (ب ج) تا نقطۂ (د) خارج شود وخط (اس) زاویۂ (ب اج) را تنصیف نموده با (ب ج) در نقطۂ (س) وصل شود
ثابت کن که مجموعۂ زاویتین (ا ب د) و (اج د) دوچنداست نسبت بزاویۂ (اس د)

(۳) هرگاه دو زاویۂ قاعدۂ مثلث متساوی الساقین را دو خطِ مستقیم تنصیف نموده باهم وصل شوند
پس زاویۂ که ازاین دو خط متشکل گردد
مساویست بازاویۂ خارجۂ که بر قاعدۂ آن شکل متشکل شود ۔

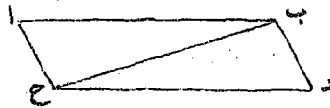
(۴) مجموعۂ تمام زوایای خارجۂ هر شکل ذو اربعۃ الاضلاع بمساوی چهار قائمه میباشد ثابت کن ۔

(۵) ثابت کن مجموعۂ تمام زوایای داخلۂ شکل مسدّس بمساوی هشت قائمه میباشد ۔

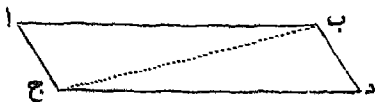
(۶) هر زاویۂ شکل مخمّس متساوی الزوایا بقدر ($1\frac{1}{5}$) یك قائمه مع یك خمس قائمه میباشد ثابت کن ۔

(۷) بنما چند اضلاع خواهد بود آن شکل مستقیم الاضلاع را که مجموعۂ زوایای داخلۂ آن دوچند باشد نسبت بزوایای خارجۂ آن ۔

شکل (۳۳) اثباتی

هرگاه در یك سمت هر طرفی از اطرافِ دو خطِ مستقیم متوازی و متساوی را دو خطِ مستقیم دیگر وصل دهند پس این دو خطِ واصل هم متوازی و متساوی خواهند بود

فرض کن (اب) و (ج د) دو خطِ مستقیم متوازی و متساوی اند ۔

وصل کن نقاط اطرافِ آنها را بدو خطِ مستقیم (اج) و (ب د) ۔

پس خطّین (اج) و (ب د) باهم متوازی و متساوی خواهند بود ۔

وضع شکل = وصل کن وتر (ب ج) را ٭

ثبوت = چونکه (بموجب مفروض) (اب) متوازی (ج د) است
وخط (ب ج) بر آن واقع میشود
لهذا (بحکم ش ۲۹) زاویهٔ متبادلهٔ (ا ب ج) و (ب ج د) باهم متساوی‌اند
ایضاً چونکه (بموجب مفروض) (اب) بمساوی (ج د) است
وخط (ب ج) نسبت بمثلثین (ا ب ج) و (ب د ج) مشترک است
لهذا ضلعین (اب) و (ب ج) بمساوی ضلعین (د ج) و (ج ب) میباشند
هریکی موافق نظیر خود
وزاویهٔ (ا ب ج) بمساوی (ب ج د) که متبادله‌اند ثابت ومذکور شد ٭
لهذا (بحکم ش ۴) قاعدهٔ (اج) بمساوی قاعدهٔ (ب د) ومثلث (ا ب ج)
بمساوی مثلث (ب ج د) میباشد ٭
ونیز زوایائیکه مقابل اضلاع متساویه واقعند بانظائر خود متساوی‌اند ٭
لهذا زاویهٔ (ا ج ب) بمساوی زاویهٔ (ج ب د) میباشد ٭
ایضاً چونکه خط مستقیم (ب ج) بر دو خط مستقیم (اج) و (ب د)
واقع میشود
وزوایای متبادله (ا ج ب) و (ج ب د) را متساوی تشکیل میدهد

پس

یعنی مربع مستطیل معین شبه معین)۔
وهرگاه اضلاع متقابلهٔ آن متوازی نباشند
آن اشکال از اقسام منحرف میباشند
یعنی توان گفت یکی از اشکال منحرف را ذوار بعة الاضلاع
ولکن نتوان گفت متوازی الاضلاع (ببین حد ۳۴))۔

(۲) در متوازیها الاضلاع =
(اول) هرگاه یک زاویه قائمه باشد باقی زوایا نیز قائمه خواهند بود)۔
(دوم) هرگاه دو ضلع متصل متساوی وزاویه قائمه باشد ــ آن شکل مربع خواهد بود
(سوم) هرگاه دو ضلع متصل متساوی باشند ــ آن شکل معین یا مربع خواهد بود
(چهارم) هرگاه دو ضلع متصل متساوی باشند ــ اوتار آن بر توائم تقاطع خواهند نمود
(پنجم) هرگاه اقطار بریکدیگر عمود باشند ــ آن شکل مربع یا معین خواهد بود)۔
(وتر را گاهی قطر خوانند)
(ششم) هرگاه اقطار تنصیف زوایای موصولهٔ خود نمایند ــ آن شکل معین یا مربع خواهد بود)۔
(هفتم) هرگاه اقطار متساوی باشند ــ تمام زوایای آن قائمه خواهند بود)۔

(۳) در ذوار بعة الاضلاع =
(اول) هرگاه اضلاع متقابله متساوی باشند ــ آن شکل متوازی الاضلاع خواهد بود
(دوم) هرگاه زوایای متقابله متساوی باشند ــ آن شکل متوازی الاضلاع خواهد بود)۔
(سوم) هرگاه اوتار تنصیف یکدیگر نمایند ــ آن شکل متوازی الاضلاع خواهد بود
(چهارم) هرگاه دو وتر تنصیف شکل نمایند ــ این شکل متوازی الاضلاع خواهد بود

(۴) اشکال چهار گوشه که قائمة الزاویه نباشند ــ اوتار آن متساوی نخواهند بود)۔

مشق =

(۱) ا ب ج د متوازی الاضلاعی است
س و ص نقاط وسط در (ا د) و (ب ج)
ثابت کن که (ا ص ج س) متوازی الاضلاع میباشد)۔

(۲) هرگاه در دو متوازی الاضلاع ضلعین متصلهٔ یکی با ضلعین متصلهٔ دیگر متساوی باشند
و زوایای متشکلهٔ این زوجین هم متساوی باشند
ثابت کن هر دو متوازی الاضلاع از هر حیثیت باهم متساوی خواهند بود)۔

(۳) هرگاه در دو مستطیل ضلعین متصلهٔ یکی با ضلعین متصلهٔ دیگر متساوی باشند
ثابت کن هر دو مستطیل باهم متساوی خواهند بود)۔

فصل سوم

سطوح متوازی الاضلاع و مثلثات

توضیح = در دو فصل پیش که ذکر مساوات اشکال شده است

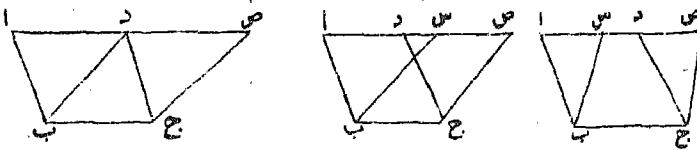
از هر حیثیت باهم برابر یعنی متساوی الاجزاء بوده اند
و محکوم بعمل انطباق (ببین تفهیم فقرهٔ هشتم از علوم متعارفه)
ولکن بعد ازین یعنی در فصل سوم ذکر مساوات متوازی الاضلاع
و مثلثات بلحاظ سطوح خواهد بود
لازم نیست بریکدیگر منطبق شوند
(یعنی این اشکال تنها متشابه نباشند که بغیر از تبدیل نمودن شکل عمل انطباق واقع شود)
لهذا درین فصل عمل انطباق معمول نباشد

﴿حدود﴾

(۱) ارتفاع متوازی الاضلاع آن فاصلهٔ عمودیست که مابین قاعده و ضلع مقابل واقع شود

(۲) ارتفاع مثلث آن فاصلهٔ عمودیست
که مابین راس و قاعدهٔ آن واقع شود

شکل (۳۵) اثباتی

اشکال متوازی الاضلاع که بریک قاعده و درمیان دو
خط متوازی واقع شوند باهم متساوی میباشند

فرض کن (ا ب ج د) و (س ب ج ص) اشکال متوازی الاضلاع میباشند

و بریک قاعده (ب ج) مابین متوازیین (ا ص) و (ب ج) واقع

پس متوازی الاضلاع (ا ب ج د) بمساوی متوازی الاضلاع (س ب ج ص)
خواهد بود

صورت اول = هرگاه در هر دو متوازی الاضلاع معلومه
ضلعینیکه مقابل قاعدهٔ (ب ج) واقع شده اند
در یک نقطهٔ (د) منتهی شوند

درانیصورت (بحکم شر ۳۴) ظاهراست که متوازی الاضلاع مضاعف مثلث (دبج) خواهد بود)،

لهذا (بحکم علم ۶) باهم متساوی میباشند)،

صورت دوّم = هرگاه سرهر دو متوازی الاضلاع مذکوره ضلعین (اد) و (سص) دریک نقطهٔ (د) منتهی نباشند

پس چونکه (ابجد) متوازی الاضلاع میباشد

لهذا (بحکم شر ۳۴) ضلعین (اد) و (بج) باهم متساویند)،

وبهمین دلیل ضلع (سص) مساوی است باضلع (بج)

لهذا (بحکم علم ۱) (اد) بمساویٔ (سص) میباشد)،

ایضاً (بحکم علم ۲ـ۳) کلّ (اس) یااینکه بقیّه ان مساویست با کلّ یااینکه بابقیّه (دص)

و (بحکم شر ۳۴) (اب) بمساویٔ (دج) میباشد

لهذا ضلعین (سا) و (اب) مساویند باضلعین (صد) و (دج) هر جزوی بانظیر خود موافق)،

و (بحکم شر ۲۹) زاویهٔ خارجهٔ (صدج) برابراست بازاویهٔ داخلهٔ (ساب) که مقابل واقع شده است)،

لهذا (بحکم شر ۴) مثلث (صدج) مساویست بامثلث (ساب)،

از شکل منحرفهٔ (ابجص) ساقط کن مثلث (صجد) را

ایضاً از شکلِ مذکوره ساقط کن مثلثِ (س ا ب) را

(هر دفعہ بعد از اسقاطِ متساویات ملاحظہ کن چہ باقی می ماند)۔

لهذا (بحکم علم ۳) بعد از اسقاطِ مثلث در هر مرتبہ

باقیات باهم متساوی میباشند)۔

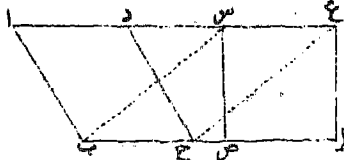
یعنی متوازی الاضلاع (ا ب ج د)

بمساوی متوازی الاضلاع (س ب ج ص) میباشند)۔....

لهذا اشکالِ متوازی الاضلاع کہ بر یک قاعدہ الخ

توضیح = هرگاه از یک زاویۂ متوازی الاضلاع تا نقطۂ وسطِ ضلعِ مقابل خطی خارج شود
واز خروج آن مثلثی کہ متشکل میگردد
آن مثلث بمساوی ربع متوازی الاضلاع خواهد بود
چنانچہ از این شکل تشفی خاطر مبتدی خواهد شد)۔
ونیز معلوم شود کہ دو متوازی الاضلاع بر یک قاعدہ وما بینِ
دو خط متوازی باهم متساویند)۔

شکل (۳۶) اثباتی

اشکالِ متوازی الاضلاع کہ بر قواعدِ متساویہ وما بینِ دو خطِ
متوازی واقع باشند باهم متساوی خواهند بود

فرض کن (ا ب ج د) و (س ص ط ع) اشکالِ متوازی الاضلاع

و بر قواعد متساویۂ (ب ج) و (ص ط) ما بینِ متوازیین (اع) و (ب ط)
واقع میباشند)۔
پس متوازی الاضلاع (ا ب ج د) بمساوی (س ص ط ع) خواهد بود)۔

وضع شکل = وصل کن (ب س) و (ج ع) را
ثبوت = چونکه (بموجب مفروض) (ب ج) بمساوی (ص ط) میباشد
و (بحکم شق ۳۴) (ص ط) بمساوی (س ع)
لهذا (بحکم علم ۱) (ب ج) مساویست با (س ع)
و (بموجب مفروض) خطوط مذکوره نیز متوازی میباشند)۔
و هر طرفی از اطرافِ آنها بخطوط مستقیمۂ (ب س) و (ج ع)
موصول شده است
و (بحکم شق ۳۳) خطوطِ مستقیمۂ کہ واصل هر طرفی از طرفین
خطوطِ مستقیمۂ متوازیہ و متساویہ باشند
آن خطوط نیز باهم متساوی و متوازی خواهند بود)۔
لهذا خطینِ (ب س) و (ج ع) باهم متساوی و متوازی میباشند)
پس (بحکم حدود) (س ب ج ع) شکل چهارگوشہ یعنی متوازی الاضلاع
میباشد)۔
لهذا (بحکم شق ۳۵) مساویست با متوازی الاضلاع (ا ب ج د)
زیرا کہ بر یک قاعدۂ (ب ج) و ما بینِ متوازیینِ (ب ط) و (اع) واقع
شده اند)۔

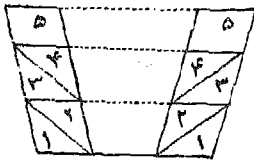
ونیز بہمین دلیل متوازی الاضلاع (س ص ط ع)
مساویت با متوازی الاضلاع (س ب ج ع)
پس (بحکم علم ۱) متوازی الاضلاع (ا ب ج د)
مساویت با متوازی الاضلاع (س ص ط ع)
لهذا اشکال متوازی الاضلاع کہ بر قواعد متساویہ الخ

تفهیم :- در دو مبحث آخرینی (۳۵) و (۳۶) مستنتج میشود =

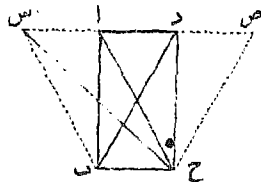
(۱) سطح متوازی الاضلاع مساویست با آن مستطیل یا قائم الزاویہ کہ ارتفاع و قاعدۂ آن برابر باشد با ارتفاع و قاعدۂ متوازی الاضلاع مذکور ۔

(۲) سطوح اشکال متوازی الاضلاع کہ ارتفاع و قواعد آنہا باہم برابر باشد باہم متساوی خواهند بود

(۳) در دو سطح متوازی الاضلاع کہ ارتفاع آن باهم متساوی باشد اعظم است انکہ قاعدہ اش اطول است ۔

(۴) در دو سطح متوازی الاضلاع کہ قواعد آن باهم متساوی باشند اعظم است انکہ ارفع باشد ۔

(۵) ازین شکل ظاهر شود کہ
اشکال متوازی الاضلاع کہ بر قواعد متساویہ و مابین متوازیین باشند باهم متساویند ۔

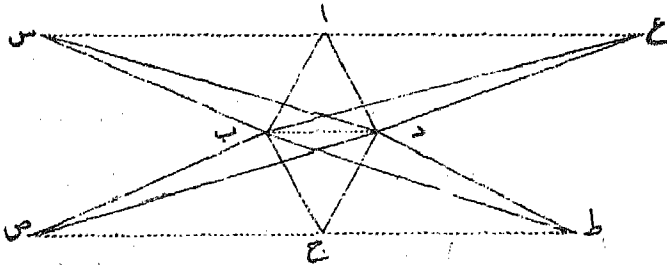
شکل (۳۷) اثباتی

مثلثات کہ بر یک قاعدہ و مابین متوازیین واقع شوند باهم متساوی خواهند بود

فرض کن (ا ب ج) و (د ب ج) دو مثلّث و بریک قاعدۂ (ب ج)
و مابینِ متوازیینِ (ا د) و (ب ج) واقع شده اند ؛
پس مثلّثِ (ا ب ج) بمساویِ مثلّثِ (د ب ج) خواهد بود ۔
وضع شکل (بحکم اصول ۲) خارج کن خطِ ممدودۂ (ا د) را از
هر دو طرف
تا نقطۂ (س) و (ص)
و (بحکم ش ۳۱) از نقطۂ (ب) خارج کن خطِ (ب س) را
که متوازی باشد با خطِ (ا ج)
و از نقطۂ (ج) خارج کن خطِ (ج ص) را
که متوازی باشد با خطِ (ب د)

ثبوت = پس (بحکم حدود) هر یکی از دو شکل
یعنی (س ب ج ا) و (د ب ج ص) متوازی الاضلاع میباشند)
و (بحکم ش ۳۵) (س ب ج ا) بمساویِ (د ب ج ص) میباشند)
زیرا که بریک قاعدۂ (ب ج) و مابینِ متوازیینِ (ب ج) و (س ص)
واقع اند ؛
و مثلّثِ (ا ب ج) نصفِ متوازی الاضلاع (س ب ج ا) میباشد
لهٰذا (بحکم ش ۳۴) (ا ب) منصّفِ متوازی الاضلاع میباشد
یعنی تنصیف میکند (س ب ج ا) را ؛
و مثلّثِ (د ب ج) نصفِ متوازی الاضلاع (د ب ج ص) میباشد

لهٰذا (بحکم ش ۳۴) (دج) تنصیف میکند متوازی الاضلاع (د ب ج ص) را ۞

لهٰذا (بحکم علم ۷) اشیائیکه نسبت بچیزی نصف باشند آن اشیاء باهم متساویند ۞

پس مثلثِ (ا ب ج) بمساوی مثلثِ (د ب ج) میباشد ۞

لهٰذا مثلثات کہ بر یک قاعدہ الخ

سؤال = (۱) در چه صورتی توان ثابت نمود که مجموعہ مثلثات اربعہ یعنی (س ب د) و (ص ب د) و (ط د ب) و (ع د ب) دو چند است نسبت بمتوازی الاضلاع (ا ب ج د)

جواب = در صورتیکہ (س ع) و (ص ط) متوازی باشد با (ب د)

سؤال = (۲) در چه صورتی توان ثابت نمود کہ یکی از مثلثاتِ اربعہ مثلاً (ع ب د) مساویست با مثلث (ا ب د) ۞

جواب = در صورتیکہ (ب د) متوازی (س ع) یا (ا ع) باشد ۞

مشق =

(۱) در شکل (۳۷) (ا ج) و (ب د) در نقطہ (ط) تقاطع نموده اند ثابت کن =

(اول) مثلثین (ا ب ط) و (د ط ج) باهم متساویند

(دوم) اشکال ذوار بعۃ الاضلاع (س ب ط ا) و (ص ج ط د) باهم متساویند ۞

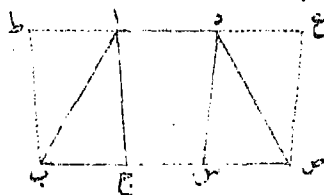
(۲) در شکل (۱۶) ثابت کن مثلثین (ا ب ج) و (ص ب ج) باهم متساویند ۞

(۳) بر قاعدہ مثلثِ معلوم بساز مثلثِ متساوی الساقین را قسمی

کہ سطح آن متساوی باشد با مثلث معلومہ ۔

(۴) ہر گاہ نقاط وسط دو ساق مثلث متساوی الساقین را وصل کنیم
و از آن نقاط عمائد بر قاعدہ قائم سازیم
متوازی الاضلاعی کہ ازین عمل مرتسم گردد
ثابت کن بمساوی نصف متساوی الساقین معلوم خواہد بود ۔

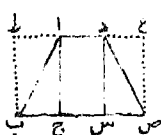
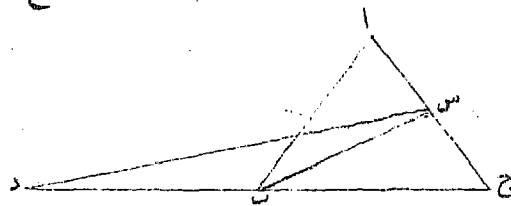
شکل (۳۸) اثباتی

**مثلثاتی کہ بر قواعد متساویہ وما بین دو خط متوازی واقع باشند
باہم متساوی خواہند بود**

فرض کن (ا ب ج) و (د س ص) دو مثلث
و بر قواعد متساویہ (ب ج) و (س ص) ما بین متوازیین (ب ص) و (ا د) واقع شدہ اند
پس مثلث (ا ب ج) بمساوی مثلث (د س ص) خواہد بود ۔

وضع شکل = خط ممدودہ (ا د) را خارج کن از ہر دو طرف
تا بنقطہ (ع) و (ط) ۔
و بحکم ش (۳۱) از نقطہ (ب) خارج کن خط (ب ط) را
کہ متوازی باشد با خط (ا ج)
و از نقطہ (ص) خارج کن خط (ص ع) را
کہ متوازی باشد با خط (س د)

ثبوت = لہذا بحکم حدود ہر یکی از سطحین (ط ب ج ا) و

(د س ص ع) متوازی الاضلاع میباشند)

وکذلك (بحکم ش ۳۷) باهم متساوی میباشند
زیراکه بر دو قاعدهٔ متساویهٔ (ب ج) و (س ص)
وما بین متوازیین (ب ص) و (ط ع) واقع شده اند)

وچونکه قطر (ا ب) تنصیف میکند متوازی الاضلاع (ط ب ج ا) را
لهذا (بحکم ش ۳۴) مثلّث (ا ب ج) بقدر نصف متوازی الاضلاع
معلوم میباشد)
ایضاً چونکه قطر (د ص) تنصیف میکند متوازی الاضلاع (د س ص ع) را
لهذا مثلّث (د س ص) بقدر نصف متوازی الاضلاع میباشد
وچونکه (بحکم علم ۷) اشیائیکه نسبت بچیزی نصف باشند
آن اشیا باهم متساویند)
پس مثلّث (ا ب ج) مساوی مثلّث (د س ص) میباشد)
لهذا مثلّثات که بر قواعد متساویه الخ

سؤال = درچه صورتی توان ثابت نمود که مثلّثین (ا ب ج) و (د ج س) باهم متساویند)
جواب = درصورتیکه (ب س) تنصیف نماید ضلعین (ا ج) و (د ج) را)

مشق

(۱) هر مثلّثی تقسیم شود از خط متوسط خود در دو قسمت متساوی)

ومراد از خطِ متوسط خطی است که از یک زاویهٔ مثلث تا نقطهٔ وسطِ ضلعِ مقابل خارج شود

(۲) هر متوازی الاضلاع را اقطار تقسیم میکنند در چهار مثلث که سطوح آنها با هم متساوی باشند))—

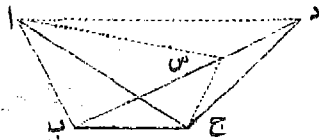
(۳) (ا ب ج) مثلثی است و قاعدهٔ (ب ج) در نقطهٔ (د) تنصیف میشود))—
پس هرگاه در متوسطِ (ا د) نقطهٔ مثلاً (س) واقع شود
ثابت کن که مثلثِ (ا ب س) مساوی است با مثلثِ (ا ج س)))—

(۴) (ا ب ج د) متوازی الاضلاع است
و در وترِ (ا ج) نقطهٔ مثلاً (س) معین شده است
و (س ب) و (س د) موصول شده اند
ثابت کن مثلثِ (ب ا س) مساویست با مثلثِ (د ا س)))—

(۵) هرگاه در دو مثلث ضلعین هر یکی علی التناظر با هم متوافق باشند
و زوایای متشکلهٔ این اضلاع مکمل یکدیگر باشند
پس سطوح هر دو مثلث با هم متساوی خواهند بود))—
—((مکمل یکدیگر یعنی مجموعهٔ هر دو یک قائمه باشد))—

شکل (۳۹) اثباتی

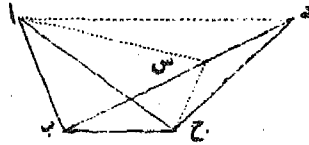
مثلثات متساویه که بر یک قاعده و در یک سمت آن باشند واقع میشوند مابینِ دو خطِ متوازی

ا — د — س — ب — ج

فرض کن (ا ب ج) و (د ب ج) دو مثلثِ متساوی در یک سمت بر قاعدهٔ (ب ج) واقع شده اند))—

پس هر دو مثلث مابینِ متوازیین واقع خواهند شد))—

یعنی هرگاه (ا د) موصول شود پس (ا د) متوازی (ب ج) خواهد بود

بدلیل اینکه هرگاه چنین نباشد

(۱) وضع شکل = پس بحکم ش (۳۱) بشرطِ امکان خارج کن از نقطهٔ

خط ا س را که متوازی باشد با ب ج)

وصل کن س ج را

ثبوت = لهذا (بحکم ش ۳۷) مثلث ا ب ج مساویست با مثلث س ب ج

زیرا که هر دو بر یک قاعدهٔ ب ج مابین متوازیین ب ج و ا س واقع شده اند

لکن (بموجب مفروض) ا ب ج بمساوی مثلث د ب ج میباشد

پس (بحکم علم ۱) مثلث د ب ج برابر است با مثلث س ب ج

یعنی مثلث بزرک مساویست با مثلث کوچک

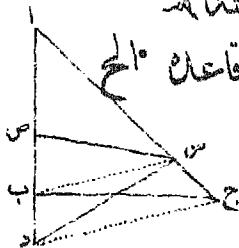
واین امر غیر ممکن است

زیرا که جزو با کل برابر نباشد

لهذا ا س متوازی نباشد ب ج را

وبهمین دلیل ثابت توان نمود

که بغیر از خط ا د هیچ خط مستقیمی متوازی ب ج نخواهد شد

پس خط ا د متوازی خط ب ج میباشد

لهذا مثلثات متساویه که بر یک قاعده الخ

سؤال (۱) در چه صورتی توان ثابت نمود
که مثلثین (ا ب ج) و (ا د س) باهم متساویند؟
جواب = در صورتیکه (ب س) متوازی باشد (د ج) را
سؤال (۲) در چه صورتی توان ثابت نمود
که (س ص) تنصیف نموده است هر دو مثلث را
یعنی (ا ب ج) و (ا د س) را
جواب = در صورتیکه (ص) نقطهٔ وسط (ا د) باشد؟

مشق

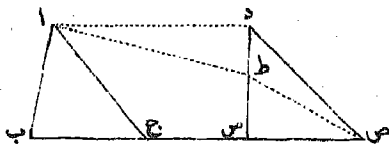
(۱) هرگاه نقاط وسط اضلاع مثلثی را
بخط مستقیمی وصل نمائیم
این خط با قاعدهٔ آن متوازی خواهد بود؟

(۲) هرگاه دو خط مستقیم (ا ب) و (ج د) بر نقطهٔ (س) تقاطع نمایند
قسمیکه مثلث (ا س ج) مساوی باشد با مثلث (د س ب)
ثابت کن (ا د) و (ج ب) متوازیند؟

(۳) هرگاه در سؤال شکل (۳۸) (ا د) وصل شود
ثابت کن که مثلثین (ا ب ج) و (ا ب د) باهم متساویند؟

(۴) در شکل مذکوره (ص) نقطه تقاطع (ا ب) و (د س) است
ثابت کن =
(اوّل) مثلث (ا د ص) مساویست با ذو اربعة الاضلاع (ب ج س ص)؟
(دوّم) مثلثین (ا س ص) و (د ب ص) باهم متساویند؟

شکل (۴۰) اثباتی

مثلثات متساویه که قائم بریک جانب قواعد متساویه و ممتد بریک خط مستقیم‌اند واقع شوند مابین خطوط متوازی‌اند

فرض کن دو مثلث (ا ب ج) و (د س ص) دریک جانب بر قواعد
متساویه (ب ج) و (س ص)
و بریک خط مستقیم (ب ص) واقع شده‌اند؟

پس ہر دو مثلث مابینِ متوازیین واقع خواہند شد ۔

یعنی ہرگاہ (اد) را وصل کنیم

متوازی (ب ص) خواہد بود ۔

وہرگاہ چنین نباشد

وضع شکل = پس (بحکم ش ۳۱) بشرطِ امکان

از نقطۂ (ا) خارج کن (اط) واگر متوازی باشد با خطِ (ب ص)

وصل کن (ص ط) را

ثبوت پس (بحکم ش ۳۸) مثلثِ (ا ب ج) برابر است با مثلثِ

(ط س ص) ۔

زیرا کہ بر قواعدِ متساویۂ (ب ج) و (س ص)

و مابینِ متوازیینِ (ب ص) و (اد) واقع شدہ اند

لکن (بموجب مفروض) مثلثِ (ا ب ج) مساویست با مثلثِ

(د س ص) ۔

لہٰذا (بحکم علم ۱) مثلثِ (د س ص) مساوی شد با مثلثِ

(ط س ص) ۔

یعنی مثلثِ بزرگ مساوی شد با مثلثِ کوچک واین غیر ممکن است

لهذا (اط) متوازی نباشد (ب ص) را

وبهمین دلیل ثابت توان نمود که بغیر از خطِ (ا د)
هیچ خطِ مستقیمی متوازی نخواهد شد (ب ص) را
پس (ا د) متوازی میباشد (ب ص) را

لهذا مثلثاتِ متساویہ کہ قائم الخ

تفهیم

(۱) این دعوی را باسلوب دیگر نیز ثابت کنند که احتیاج برهان خلف نباشد
وصل کن (ب د) و (ج د) را
پس (بحکم ش ۳۸) مثلثین (د ب ج) و (د س ص) باهم متساویند
ولکن (بموجب مفروض) مثلثِ (ا ب ج) مساویست با مثلثِ (د س ص)
پس (بحکم علم ۱) مثلثین (د ب ج) و (ا ب ج) باهم متساوی میباشند
لهذا (بحکم ش ۳۹) (ب ج) متوازی (ا د) میباشد

(۲) چون در هر مثلث خطی که از نقطۂ راس آن تا نقطۂ وسطِ قاعده خارج شود
آن خط تنصیف مثلث میکند
ولکن بغیر از نقاط مذکوره
نقاطی در اضلاع مثلث میباشند که از آنجا توان تنصیفِ هر مثلث نمود
بیانِ سؤالاتِ شکل (۳۹)
میخواهیم مثلثِ (ا ب ج) را از نقطۂ (س) تنصیف نمائیم
وصل کن (س ب) را
از نقطۂ (ج) خارج کن خطِ (ج د) را که متوازی باشد با (س ب)
وصل کن (س د) را
تنصیف کن مثلثِ (س ا د) را بخطِ (س ص)
پس مثلثِ (ا ب ج) از نقطۂ (س) تنصیف شده است

(درک کن این نکته را که چرا متوازیِ (س ب) از نقطۂ (ج) خارج شده است
چه ممکن بود متوازیِ (س ب)
از نقطۂ (ا) خارج شود)

مشق

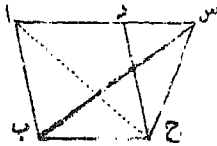
(۱) در سؤالات شکل (۳۹)
مثلث (ا ب ج) از نقطۂ (س) تنصیف شده است
پس در ضلع (ا ب) معین کن نقطۂ را و از آن نقطه تنصیف کن مثلث را الخ

(۲) درصورتیکه (س ص) منتصف متلثین (ا ب ج) و (ا د س) میباشد
ثابت کن که ذوار بعة الاضلاع (ب ج س ص)
مساویست با مثلث (ا س ص)۔

(۳) ایضًا چون (ج د) متوازیٔ (س ب) میباشد
ثابت کن مثلثین (ب ج د) و (س د ج) متساویند۔
و کذلک مثلثین (د س ب) و (ج ب س) باهم متساوی میباشند۔

شکل (۴۱) اثباتی

هرگاه متوازی الاضلاع و مثلث بریک قاعده و مابین متوازیین واقع باشند پس متوازی الاضلاع دوچند مثلث خواهد بود

ا د س
ب ج

فرض کن متوازی الاضلاع (ا ب ج د) و مثلث (س ب ج)
مابین متوازیین (ب ج) و (ا س) واقع شده اند۔

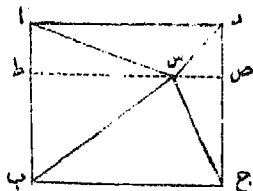
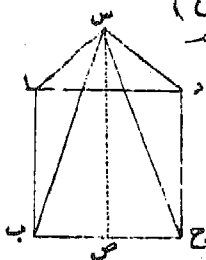
پس متوازی الاضلاع (ا ب ج د) مضاعف مثلث (س ب ج) خواهد بود

وضع شکل = وصل کن (ا ج) را

پس (بحکم ش ۳۷) مثلث (ا ب ج) برابراست با مثلث (س ب ج)

ثبوت = زیراکه بریک قاعدهٔ (ب ج) و مابین متوازیین (ب ج) و (ا س) واقع میباشند۔

لکن متوازی الاضلاع (ا ب ج د) دوچنداست نسبت بمثلث (ا ب ج)
زیراکه (بحکم ش ۳۴) قطر (ا ج) تنصیف میکند متوازی الاضلاع
پس متوازی الاضلاع (ا ب ج د) دوچنداست نسبت بمثلث (س ب ج)

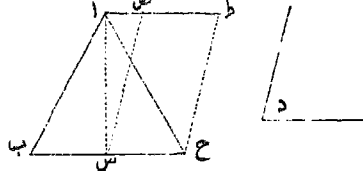
لهٰذا هرگاه متوازی الاضلاع و مثلث بر یک قاعده الخ

سؤال = (۱) در متوازی الاضلاع (ا ب ج د)۔
چه قسم توان ثابت نمود که مجموعهٔ مثلثینِ (س ا ب) و (س د ج)
مساوی است با مجموعهٔ مثلثینِ (س د ا) و (س ج ب)
جواب = از اخراج خطِ (ص ط) که متوازی باشد با (ا د) یا (ب ج)
و قاطع باشد نقطهٔ رؤسِ مثلثینِ متقابله را)۔

سؤال = (۲) در متوازی الاضلاع (ا ب ج د)
چه قسم توان ثابت نمود که مجموعهٔ مثلثینِ (س ب ا) و (س ج د)
مساوی نصف متوازی الاضلاع معلوم است
جواب = هرگاه از رؤس مثلثین خارج شود خطِ (س ص)
که متوازی باشد با (ا ب) ثبوتِ دعوی معلوم خواهد بود)۔

مشق

(۱) در شکل (۴۱) از نقطهٔ (ج) خارج کن متوازی (ب س)
و ثابت کن شکل را)۔
(۲) هرگاه متوازی الاضلاع و مثلث بر قواعد متساوی و مابینِ متوازیین واقع شوند
پس متوازی الاضلاع نسبت بمثلث دوچند خواهد بود)۔
(۳) هرگاه قاعدهٔ مثلثی دوچند باشد نسبت بمتوازی الاضلاع
و هر دو مابینِ متوازیین باشند
پس هر دو باهم متساوی خواهند بود)۔
(۴) هرگاه در سطح متوازی الاضلاع نقطهٔ معیّن شود
و از آن نقطه تا گوشه های شکل خطوط مستقیمه خارج شوند
پس از این عمل دو مثلث که بر اضلاع متقابله متشکل شوند
مجموعهٔ هر دو مثلث مساوی نصف متوازی الاضلاع خواهد بود

(۵) خارج از سطحِ متوازی الاضلاع نقطهٔ را اختیار کن
و موافق عمل مذکور بنما صورت دعوی را) ــ
(۶) متوازی الاضلاعیکه احاطه نموده باشد اجزاء متوازی الاضلاع دیگر را
قسمیکه اضلاع شکل محیط متوازی باشند با اقطارِ شکلِ داخلی
پس شکل داخلی مساوی نصف شکلِ خارجی خواهد بود) ــ
(۷) آن اشکال ذوات اربعة الاضلاع باهم متساوی خواهند بود
که اوتارِ آنها و زوایای متشکلهٔ اوتار
که از تقاطع صورت گیرند متساوی باشند) ــ

شکل (۴۲) عملی

متوازی الاضلاعی بنما که مساوی باشد با مثلثِ معلوم
و یک زاویهٔ آن برابر باشد با زاویهٔ معلومهٔ مستقیمة الخطین

فرض کن (ا ب ج) مثلثِ معلوم و (د) زاویهٔ معلوم مستقیمة الخطین
مطلوب اینست که بمساوی مثلثِ (ا ب ج) متوازی الاضلاعی مرتسم شود
که یک زاویهٔ آن برابر باشد با زاویهٔ (د)
وضع شکل = (بحکم ش ۱۰) تنصیف کن (ب ج) را بر نقطهٔ (س)
و (بحکم ش ۲۳) در خطِ مستقیم (س ج) بر نقطهٔ (س)
بساز زاویهٔ (ج س ص) را
که مساوی باشد با زاویهٔ (د)) ــ
و (بحکم ش ۳۱) از نقطهٔ (ج) خارج کن خطِ (ج ط) را
که متوازی باشد با خطِ (س ص)) ...

و از نقطهٔ

واز نقطۂ ا خارج کن خطِ اص ط را
کہ متوازی باشد باس ج
لهٰذا (بحکم حد ۳۳) ج س ص ط متوازی الاضلاع خواهد بود
وصل کن اس را
ثبوت = چونکه ب س بمساوی س ج است
لهٰذا (بحکم ش ۳۸) مُثلّثِ ا ب س مساویست با مُثلّثِ ا س ج
زیراکه بر قواعد متساویۂ ب س و س ج
ومابینِ متوازیینِ ب ج و ا ط واقع شده اند
لهٰذا مثلّثِ ا ب ج دوچنداست نسبت بمثلّثِ ا ب س
لکن (بحکم ش ۴۱) متوازی الاضلاع ص س ج ط
دوچنداست نسبت بمثلّثِ ا س ج
زیراکه هردو بریك قاعدۂ س ج
ومابینِ متوازیینِ س ج و ا ط واقع شده اند
پس (بحکم علم ۶) متوازی الاضلاع ص س ج ط
بمساوی مُثلّثِ ا ب ج میباشد
ویك زاویۂ ان یعنی ج س ص بمساوی زاویۂ د تشکیل یافته است
لهٰذا بمساوی مثلّثِ ا ب ج متوازی الاضلاع ص س ج ط
که یك زاویۂ ان برابراست با زاویۂ د مرتسم کردید وهم همین بود

تمرین

(۱) متوازی‌الاضلاعی بساز که مساوی مربّع معلوم وقائم بر یک قاعده باشند ونیز یک زاویهٔ آن قائمه باشد))

(۲) برابر متوازی‌الاضلاع بساز شکل معیّن را که بر قاعدهٔ متوازی‌الاضلاع مذکور واقع باشد وبمادرچه صورتی از اقسام این معیّن غیر ممکن است))

(۳) مستطیل بساز که برابر مثلث معلوم باشد))

(۴) مساوی متوازی‌الاضلاع معلوم مثلث بساز که یک زاویهٔ آن برابر زاویهٔ معلوم باشد))

(۵) برابر متوازی‌الاضلاع معلوم بر قاعدهٔ آن بساز مثلث قائم‌الزاویه را))

(۶) برابر مثلث معلوم معیّن بساز))

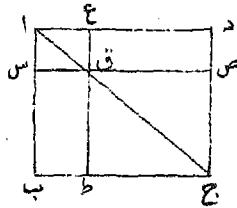
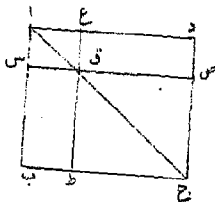
حل = هرگاه در قطر متوازی‌الاضلاع نقطهٔ معیّن شود واز آن نقطه خطوط مستقیمه که متوازی باشند با اضلاع آن شکل خارج شوند

پس شکل موصوف در چهار ذوار بعة الاضلاع یعنی متوازی‌الاضلاع منقسم خواهد شد واز این چهار دو متوازی‌الاضلاع را که خط قطر از آن میگذرد اشکال حوالی قطر متوازی‌الاضلاع نامند وهریکی از آن دو متوازی‌الاضلاع باقی را که باتصال آن شکل مذکور تمام میشود مُتمّم متوازی‌الاضلاع گویند))

مثلاً در شکل (۴۳) (اس ق ع) و (ق ط ج ص) که دو متوازی‌الاضلاع میباشند گرداگرد قطر واقع شده اند

اشکال حوالی قطر نامند
و (ع ق ص د) و (س ب ط ق) کہ دو متوازی الاضلاع عند
متمم متوازی الاضلاع گویند ۔
و غالباً متوازی الاضلاع را بدو حرف مفرد
کہ بر دو گوشۂ آن مرقوم باشند موسوم سازند ۔

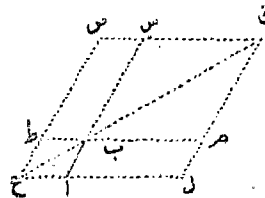
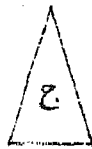
شکل (۴۳) اثباتی

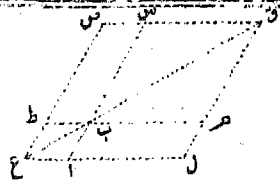
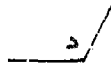
اشکال متوازی الاضلاع کہ حوالی قطر متوازی الاضلاع
واقع شوند متممان آن باہم متساوی میباشند

فرض کن (ا ب ج د) متوازی الاضلاع و قطر آن (ا ج) است
(س ع) و (ط ص) دو متوازی الاضلاع کہ حوالی قطر واقع شدہ اند
یعنی اشکالیکہ (ا ج) از وسط آنہا میگذرد ۔
و (ق ب) و (ق د) متممان باشند ۔
یعنی باتصال آنہا شکل تمام میشود ۔
پس متمم (ب ق) مساوی متمم (ق د) خواہد بود ۔
ثبوت = چونکہ (ا ب ج د) متوازی الاضلاع است

وقطر آن (اج) میباشد
لہذا (بحکم ش ۳۴) مثلثِ (ابج) مساوی مثلثِ (ادج) میباشد
ایضاً چونکہ (اس ق ع) متوازی الاضلاع است
وقطرِ آن (اق)
لہذا مثلثِ (اس ق) مساوی مثلثِ (اع ق) میباشد
وہمین دلیل مثلثِ (ق ط ج) مساوی مثلثِ (ق ص ج) میباشد
وچونکہ (اس ق) مساوی (اع ق)
و (ق ط ج) مساوی (ق ص ج) میباشند
لہذا (بحکم علم ۲) مجموعۂ مثلثینِ (اس ق) و (ق ط ج)
مساویست با مجموعۂ مثلثینِ (اع ق) و (ق ص ج)
ولکن در فوق ثابت شد کہ کلِ مثلثِ (ابج)
مساویست با کلِ مثلثِ (ادج)
پس (بحکم علم ۳) متممِ (ب ق) مساویست با متممِ (ق د)
(یعنی بعد از اسقاطِ متساویات)
لہذا اشکال متوازی الاضلاع کہ حوالی قطر الخ

مشق

(۱) ہرگاہ (ق ب) و (ق د) موصول شوند
پس مثلث (ا ق ب) مساوئ مثلث (ا ق د) خواہد بود۔
(۲) ثابت کن متوازی الاضلاع (س د) مساویست با متوازی الاضلاع (ب ع)
(۳) ثابت کن اشکالیکہ حوالی قطر معین واقع شوند
آن اشکال نیز معین باشند۔
و اشکالیکہ حوالی قطر مربع واقع شوند
مربع خواہند بود۔
(۴) بنما در چہ صورتی متممان متوازی الاضلاع از ہر حیثیت باہم متساوی باشند
یعنی بر یکدیگر منطبق شوند۔
(۵) متوازی الاضلاع (ا ب ج د) در ہشت متوازی الاضلاع تقسیم شدہ است
ہر یکی را باسم خود موسوم ساز
و ثابت کن کہ با متوازی الاضلاع (ا ب ج د)
متساوی الزوایا میباشند۔

شکل (۴۴) عملی

بر خطِ مستقیم معلوم بسا متوازی الاضلاعی را کہ متساوی باشد با مثلثِ مفروض و یک زاویہ آن برابر باشد با زاویۂ مستقیم الخطین مفروض

فرض کن (ا ب) خطّ مستقیم مفروض (ج) مثلثِ مفروض و (د) زاویۂ مستقیم الخطین مفروض۔

مطلوب اینست کہ بر خطِ مستقیم (ا ب) متوازی الاضلاعی مرتسم شود کہ مساوی باشد با مثلثِ (ج)۔

ویک زاویۂ آن برابر باشد با زاویۂ (د)
وضع شکل (بحکم ش ۴۲). بمساوی مثلث ج
بساز بر (اب) ممدوده متوازی الاضلاع (ب س ص ط) را
قسمیکه زاویۂ (س ب ط) برابر باشد با زاویۂ (د)
ایضاً خارج کن (ص ط) را تا نقطۂ (ع)
و (بحکم ش ۳۱) از نقطۂ (ا) خارج کن خطِ (اع) را
که متوازی باشد با (ب ط) یا (س ص)
وصل کن (بع) را
چونکه بر خطوطِ متوازیۂ (اع) و (س ص)
خط (ع ص) واقع میشود
لهذا (بحکم ش ۲۹) زاویتین (اع ص) و (ع ص س)
بمساوی دو قائمہ میباشد ۔
و امّا مجموعۂ زاویتین (ب ع ص) و (ع ص س)
کمتر است از دو قائمه
لهذا (بحکم علم ۱۲) (ع ب) و (ص س) بیرا زامتداد متواتر
باهم وصل خواهند شد ۔

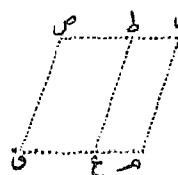
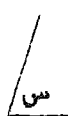
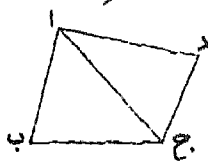
تصوّر نما کہ بعد از خروج بر نقطۂ (ق) اتّصال پیدا کنند
پس بحکم ش (۳۱) از نقطۂ (ق) خارج کن
خطِ (ق ل) راکہ متوازی باشد با (س ا) یا (ص ع)
ایضًا خارج کن خطّینِ (ع ا) و (ط ب) را
قسمیکہ با خطِ (ق ل) بر نقاطِ (ل) و (م) موصول شوند ۔
ثبوت = لہذا (ع ل ق ص) متوازی الاضلاع
و قطر آن (ع ق) میباشد ۔
و متوازی الاضلاع (اط) و (مس) اشکالِ حوالی قطر
و متمّمانِ آن (ل ب) و (ب ص) میباشند ۔
امّا متمّم (ب ص) بمساوی مثلّثِ (ج) مرتسم شدہ است
لہذا (ل ب) بمساوی مثلّثِ (ج) میباشد ۔
و چونکہ بحکم ش (۱۵) زاویتینِ (ط ب س) و (ا ب م) باہم متساوی اند
و زاویۂ (ط ب س) بمساوی زاویۂ (د) ساختہ شدہ است
پس بحکم علم ۱) زاویۂ (ا ب م) مساویست با زاویۂ (د)
لہذا بر خطِ مستقیم (ا ب) متوازی الاضلاع (ل ب)
بمساوی مثلّثِ (ج) مرتسم گردید
کہ یک زاویۂ آن یعنی (ا ب م) برابر شد با زاویۂ (د)
و مراد ہمین بودہ
مشق =

(۱) برخطِ مستقیم معلوم مستطیل بساز
که مساوی باشد با مستقیم الاضلاع معلوم ⟩

(۲) برخطِ مستقیم معلوم مثلث بساز
که مساوی متوازی الاضلاع معلوم باشد
ویك زاویهٔ آن برابر باشد بازاویهٔ معلوم ⟩

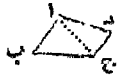
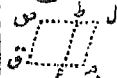
(۳) مستطیل بساز که مساوی باشد با دو مستطیل
که سطوح آنها غیر متساوی باشند ⟩

شکل (۴۵) عملی

متوازی الاضلاعی بساز که متساوی باشد با مستقیم الاضلاع
معلوم ویك زاویهٔ آن برابر باشد بازاویهٔ مستقیمة الخطین معلوم

فرض کن (ا ب ج د) مستقیم الاضلاع معلوم
و(س) زاویهٔ مستقیمة الخطین معلومه
مقصود اینست که متوازی الاضلاعی مرتسم شود
که مساوی باشد با شکلِ (ا ب ج د)
ویك زاویهٔ آن نیز مساوی باشد بازاویهٔ (س) ⟩

وضع شکل = وصل کن (ا ج) را
و (بحکم ش ۴۲) بمساوی مثلثِ (ا ج ب)
بساز متوازی الاضلاع (ص ع) را
که یك زاویهٔ آن یعنی (ص ق ع) برابر باشد بازاویهٔ (س) ⟩

(بحکم ش ۴۴) بر خطِ مُستقیم (طع)
بساز متوازی الاضلاع (طم) را
کہ مساوی باشد با مُثلّث (ادج)
ویک زاویۂ آن یعنی (طعم) برابر باشد با زاویۂ (س)
لهذا شکل (صقمل) متوازی الاضلاع مطلوب خواهد بود
ثبوت = چونکہ هر یکی از زاویتین (صقع) و (طعم)
بمساوی زاویۂ (س) ساختہ شدہ است
لهذا (بحکم علم ۱) زاویۂ (صقع) برابر است با زاویۂ (طعم)
بہر یکی از این متساویا بیفزای زاویۂ (قعط) را
پس (بحکم علم ۲) مجموعۂ زاویتین (صقع) و (قعط)
مساویست با مجموعۂ زاویتین (قعط) و (طعم)
ایضًا (بحکم ش ۲۹) چونکہ خط (صق) و (طع) باهم متوازیند
و (قع) بر آنها واقع میشود
لهذا زاویتین (صقع) و (قعط) بمساوی دو قائمہ میباشند
وکذلك زاویتین (قعط) و (طعم) بمساوی دو قائمہ اند
بنابراین (بحکم ش ۱۴) خط (قع) و (عم) بر یك خطِ مستقیم
واقع میباشند
ایضًا چونکہ بر خطوطِ متوازیۂ (قم) و (صط) خطِ مُستقیم
(عط) واقع میشود

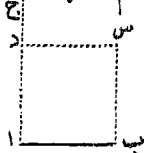
لهذا (بحکم ش ۲۹) زوایای متبادله (م ع ط) و (ع ط ص) باهم متساویند ۞
بر هر یکی ازین متساویات بیفزای زاویهٔ (ع ط ل) را
لهذا زاویتین (م ع ط) و (ع ط ل) بمساوی زاویتین (ع ط ص و (ع ط ل) میباشند ۞
لکن (بحکم ش ۲۹) چونکه (ع م) و (ط ل) باهم متوازیند و (ع ط) بر آنها واقع میشود
لهذا زاویتین (م ع ط) و (ع ط ل) بمساوی دو قائمه میباشند ۞
وکذلک زاویتین (ع ط ص) و (ع ط ل) نیز بمساوی دو قائمه باشند
پس (بحکم ش ۱۴) (ص ط) و (ط ل) در یک خط مستقیم میباشند
وچونکه از خطّین (ق ص) و (م ل) هر یکی متوازیست با (ع ط)
لهذا (بحکم ش ۳۰) (ق ص) متوازی (م ل) است ۞
امّا (ص ل) با خط (ق م) متوازی مرتسم شده است
لهذا (بحکم حد ۳۳) شکل (ق ص ل م) متوازی الاضلاع میباشد
وچونکه متوازی الاضلاع (ع ص) بمساوی مثلث (ا ب ج) مرتسم شده
ونیز متوازی الاضلاع (م ط) بمساوی مثلث (ا د ج) تشکیل یافته است
لهذا (بحکم علم ۲) تمام مستقیمة الاضلاع (ا ب ج د)
برابر است با تمام متوازی الاضلاع (ق ص ل م)
که یک زاویهٔ آن یعنی (ص ق م) بمساوی زاویهٔ (س) میباشد ــ

ومراد همین بوده است

(موافق همین سلسلهٔ استدلال که مرقوم افتاد میتوان متوازی الاضلاعی ساخت که مساوی باشد با مستقیم الاضلاعی که زیاده از چهار ضلع داشته باشد)

مشق

(۱) بر خطِ مستقیم معلوم مستطیل بساز که مساوی باشد با مستقیم الاضلاع معلوم)
(۲) سطح مستطیل و یک ضلع آن معلوم است ضلع دیگر را پیدا کن)
(۳) مساوی مجموعهٔ دو مستقیم الاضلاع یا مساوی فرق آن متوازی الاضلاعی بساز)
(۴) بر دو خط مستقیم متقاطع بساز یک مربع و یک معین را که هر دو با هم متساوی باشند)

شکل (۴۶) عملی

بر خطِ مستقیم مفروض مربع بساز

فرض کن (اب) خطِ مستقیم مفروض

مطلوب اینست که بر (اب) شکلِ مربع مرتسم شود)

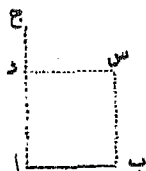
وضع شکل ـ (بحکم ش ۱۱) از نقطهٔ (ا) خارج کن خطِ (اج) را قسمیکه با (اب) زاویهٔ قائمه پیدا کند)

و (بحکم ش ۳) اد را برابر (اب) معیّن کن

از نقطهٔ (د) خارج کن خطِ (دس) را که متوازی باشد با (اب)

و از نقطهٔ (ب) خارج کن (ب س) را که متوازی باشد با (اد)

لهذا شکلِ (اب س د) مربع مطلوب خواهد بود)

ج
د   س
ا   ب

ثبوت = زیراکه (اب س د) متوازی الاضلاع مرتسم شده است

لهذا (بحکم ش ۳۴) (اب) بمساوی (دس) و (اد) بمساوی (ب س) میباشد

ولکن (اب) برابرِ (اد) خارج شده است

لهذا (بحکم علم ۱) هر چهار خطِ مستقیم

یعنی (ب ا) و (اد) و (دس) و (س ب) باهم متساوییند

وشکلِ (ادس ب) متوازی الاضلاع میباشد

همین تفصیل تمام زوایای آن قائمه اند

زیراکه خطِ مستقیم (اد) بر خطوطِ متوازیهٔ (اب) و (دس) واقع شده است

و (بحکم ش ۲۹) مجموعهٔ زاویتینِ (ب اد) و (ادس) بمساوی دو قائمه میباشند

ولکن زاویهٔ (ب اد) قائمه مرتسم شده است

لهذا زاویهٔ (ادس) هم قائمه میباشد

وچونکه (بحکم ش ۳۴) زوایای متقابلهٔ هر متوازی الاضلاع باهم متساوی میباشند

لهذا (بحکم علم ۱) زاویتینِ (ا ب س) و (ب س ج) که مقابل واقع شده اند

مساوی ذو قائمه میباشند)۔

پس شکلِ (ا ب س د) قائم الزّوایا میباشد)۔

وامّا در فوق ثابت شد که شکلِ مذکور متساوی الاضلاع هم میباشد

لهذا (بحکم حدّ ۳۰) شکلِ (ا ب س د) مربّع میباشد که بر خطِ مستقیم (ا ب)

ازاین مبحث ظاهر میشود که متوازی الاضلاعی که یك زاویهٔ آن

قائمه باشد باقی زوایای آن بالتّبع قائمه خواهند بود)۔

ایضاً بر خطوطِ متساویه مربّعات متساویه تشکیل یابد =

و مربّعاتِ متساویه را اضلاع متساویه میباشند)۔

مشق

(۱) بر قطرِ معلوم مربّع بساز)۔

(۲) بر اضلاعِ مربع یا بر اضلاعِ ممدودهٔ آن هرگاه از زوایای اربعهٔ مربع بفاصلهٔ متساوی
نقاط معیّن نموده باهم وصل شوند
مربع دیگر بیرون یا داخلِ مربعِ معلوم متشکّل خواهد شد)۔
ایضاً مخمّسِ منتظم و مسدّسِ منتظم محکومِ همین حکم است)۔

(۳) یك مربع را در پنج قسمت تقسیم کن
قسمیکه از آنها چهار مثلّث قائم الزاویه تشکیل یابد و قسمتِ پنجم مربع باشد)۔

(۴) خطیکه از نقطهٔ وسطِ ضلعِ متوازی الاضلاع تا نقطهٔ وسطِ ضلعِ دیگر
که در پهلوی آن واقع است کشیده شود تنصیفِ شکل خواهد نمود
یعنی یك ثمن شکل را قطع خواهد نمود)۔

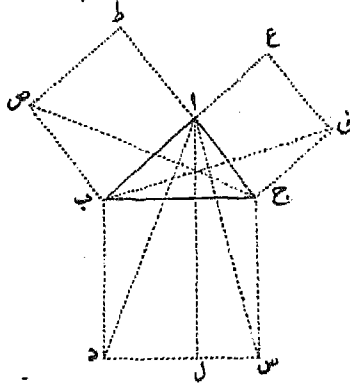
(۵) مربع را تقسیم کن قسمیکه یك نیمهٔ آن مربع باشد)۔

(۶) مربع را در پنج قسمتِ متساوی تقسیم کن
قسمیکه یك قسمتِ آن مربع باشد
و هر یکی از باقی چهار شکلِ منحرف)۔

(۷) اشکالِ خمسهٔ مذکوره را بساز بسمتِ مثلثِ قائم الزاویه که عمودِ آن دو چند باشد
نسبت بقاعده)۔

	شکل (۴۷) اثباتی	

مربّع مرتسمه بر وترِ مثلثِ قائم الزاویه مساوی میباشد

با مجموعۂ دو مربع کہ بر باقی ضلعین آن مرتسم میشوند

فرض کن (ا ب ج) مثلث قائم الزاویہ کہ یک زاویۂ آن یعنی (ب ا ج) قائمہ میباشد
پس مربعی کہ بر (ب ج) ساختہ شود مساوی خواهد بود با دو مربع کہ ساختہ شوند بر (ب ا) و (ا ج)

وضع شکل = (بحکم ش ۴۶) بساز بر (ب ج) مربع (ب د س ج) را
و بر (ب ا) مربع (ط ب) و بر (ا ج) مربع (ع ج) را
و (بحکم ش ۳۱) از نقطۂ (ا) خارج کن خط (ا ل) را کہ متوازی باشد
با (ب د) یا (ج س)
وصل کن (ا د) و (ص ج) را

ثبوت = چونکہ (بموجب مفروض) زاویۂ (ب ا ج) قائمہ میباشد
پس (بحکم حد ۳۰) زاویۂ (ب ا ط) نیز قائمہ میباشد
ایضاً چونکہ خطوط مستقیمہ (ا ج) و (ا ط) کہ از دو سمت متقابل ممتد شدہ اند
و در خط (ا ب) بر نقطۂ (ا) وصل میشوند

ودر دو جانب این دو زاویهٔ متصله مساوی دو قائمه پیدا کنند
لهذا (بحکم شرع ۱۴) (ج ا) و (ا ط) در یک خطِ مستقیم میباشند
وبهمین دلیل ثابت است که (ا ب) و (ا ع) نیز در یک خطِ مستقیم واقعند
وزاویتین (د ب ج) و (ص ب ا) باهم متساویند -
زیراکه هر یکی از آنها قائمه میباشد ۔
بیفزاے بر هر یکی از این متساویات زاویهٔ (ا ب ج) را
لهذا (بحکم علم ۲) کلِ زاویهٔ (د ب ا) برابر است با کلِ زاویهٔ (ص ب ج)
وچون ضلعِ (ا ب) بمساوی ضلعِ (ب ص) است وضلعِ (ب د)
بمساوی (ب ج)
ونیز زاویهٔ (د ب ا) برابر است با زاویهٔ (ص ب ج)
پس (بحکم شرع ۴) مثلثِ (ا ب د) مساویست با مثلثِ (ص ج ب)
لهذا (بحکم شرع ۱۴) متوازی الاضلاع (ب ل) دوچند است نسبت
بمثلثِ (ا ب د)
زیراکه هر دو بر یک قاعدهٔ (ب ج) مابین متوازیین (ب د) و (ا ل) واقع
میباشند ۔
ایضاً مربع (ط ب) دوچند است نسبت بمثلثِ (ص ج ب) ۔
زیراکه هر دو بر یک قاعدهٔ (ص ب) مابینِ متوازیین (ص ب) و
(ط ج) واقع میباشند ۔
لهذا (بحکم علم ۶) مضاعفِ متساویات باهم متساوی میباشند

پس متوازی الاضلاع (ب ل) برابر است با مربع (ط ب)

علیٰ هذا القیاس هرگاه (ا س) و (ب ق) موصول شوند ثابت توان نمود

کہ متوازی الاضلاع (ج ل) مساویست با مربع (ج ع)

بنا بر این (بحکم علم ۲) کل مربع (ب د س ج)

مساوی میباشد با دو مربع (ط ب) و (ع ج)

لهذا ثابت شد کہ مربع مرتسم بر ضلع (ب ج)

کہ وتر مثلث معلومہ میباشد مساویست با دو مربع

باقی ضلعین و مراد همین بوده ۔

مشق =

(۱) ثابت کن در این شکل =
(اوّل) = هرگاه (ب ط) و (ج ع) موصول شوند خطین واصل باهم متوازی خواهند بود
(دوم) = نقاط (ص ا ق) در یک خط مستقیم واقع شوند ۔
(سوم) = (ص ج) و (ا د) بایکدیگر زاویۂ قائمہ تشکیل نمایند ۔
(چهارم) = هرگاه (ط ع) و (ق س) و (ص د) باهم وصل شوند
از هر جهت مثلث (ط ا ع) مثل مثلث معلومہ خواهد بود ۔

(۲) بر هر مثلث (ا ب ج) کہ بر ضلعین (ا ب) و (ا ج)
مربعات (ا ب ص ط) و (ا ج ق ع) مرتسم شوند
و این مربعات بجانب مثلث واقع شوند یا بجانب بیرون از مثلث
در هر دو صورت خطوط مستقیمۂ (ب ع) و (ج ط) باهم متساوی خواهند بود ۔

(۳) در هر مثلث (ا ب ج) کہ بر اضلاع آن مثلثات متساوی الاضلاع (ب ج م) و (ج ا ی) و (ا ب ہ)
مرتسم شوند تمام بسمت داخل مثلث معلومہ باشند یا بسمت خارج آن
در هر دو صورت (ا م) و (ب ی) و (ج ہ) باهم متساوی خواهند بود ۔

(۴) بر قطر مربعی چون مربع دیگر ساختہ شود دو چند خواهد بود نسبت بمربع اوّل ۔

(۵) (ا ب ج) مثلث متساوی الاضلاعی است
و از نقطۂ (ا) عمود (ا د) بر (ب ج) خارج شده است
ثابت کن مربع (ا د) سہ چند است نسبت بمربع (ب د)

(۶) مربعی بساز کہ مساوی دو مربع باشد ۔

(۷) از نقطۂ (ا) کہ راس مثلّث (ا ب ج) میباشد
عمود (ا د) بر قاعدۂ آن قائم شدہ است
ثابت کن فرقِ مربعات (ا ب) و (ا ج) مساوی خواهد بود
با فرقِ مربعات (ب د) و (ج د) ∴

(۸) هرگاه در مثلّث (ا ب ج) نقطۂ مشلاً (د) معیّن شود
وازان نقطہ عمائد (س) و (ص) و (ط) بر اضلاع
(ب ج) و (ج ا) و (ا ب) قائم شوند
ثابت کن کہ مجموعۂ مربعاتِ حصصِ (ا ط) و (ب س) و (ج ص)
برابر است با مجموعۂ مربعاتِ حصصِ (ا ص) و (ج س) و (ب ط)

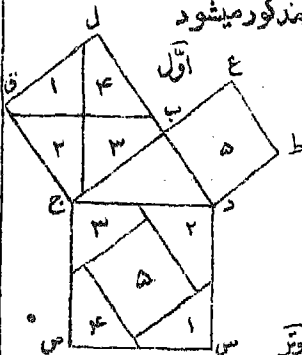
تفهیم

(۱) اقلیدس درین شکل همان صورت را ثابت نموده است کہ هر سہ مربع بسمتِ بیرونِ شکل مرتسم شوند
ولکن محقق طوسی علیہ الرّحمہ در تحریری نویسد کہ موافق جهاتِ اضلاعِ مثلّث ممکن است ارتسام مربعات و در آن هشت صورت ممکن
زیرا کہ هر ضلعی دو جهت دارد پس دو ضلع را چهار جهت باشد
و ضلع سوم را نیز دو جهت است
پس جهاتِ اربعۂ ضلعین اول را با هر یکی از دو جهتِ ضلع سوم توان تشکیل نمود
بنا برین هشت جهت میباشد ∴
امّا اشکالی کہ ازین عمل صورت بندد این پنج شکل متصوّر است
کہ برای بصیرت مبتدیان مرتسم میگردد ∴

اوّل = بر دو ضلع کوچک دو مربع کوچک بطرف بیرون
و مربع بزرگ بطرف داخل ۔
دوم = مربع بزرگ و یک کوچک بطرف داخل
و یک مربع کوچک بطرف بیرون ۔
سوّم مربع بزرگ و یک کوچک بطرف بیرون
و یک مربع کوچک بطرف داخل ۔
چهارم = دو مربع کوچک بطرف داخل
و مربع بزرگ بطرف بیرون ۔
پنجم = هر سه مربع بطرف داخل مثلّث مرتسم شوند ۔
درانجا شکل اول که بر مثلث قائم الزاویه مختلف الاضلاع ساخته شده است
ثابت میشود و حل باقی اشکال بمفهومات مبتدیان محوّل ۔
مبتدی را لازم است که عمل مذکوره را بر قائم الزاویهٔ متساوی الساقین
هم ساخته منحل سازد ۔
فرض کن بر (ا ب) مربع (ص ا) و بر (ا ج) مربع (ا ق) ساخته شده است ۔
وضع شکل = خارج کن (ق ع) و (ص ط) را تا نقطهٔ (ل)
در (ص ط) معیّن کن نقطهٔ (د) قسمیکه
(ص د) بمساوی (ا ج) باشد ۔
وصل کن (ب د) را
و از نقطهٔ (ج) خارج کن (ج س) را که با (ب د) متوازی باشد ۔
وصل کن (د س) را ۔
پس بر (ب ج) مربع (ج د) قائم میشود ۔

ازنقطهٔ (ا) خارج کن (ل م) را کہ متوازی باشد با (س ج) یا (د ب) ﴾

شبوت = لهذا بحکم ش ۳ مربع (ص ا) بمساوی متوازی الاضلاع (ل ب) میباشد
زیراکه هردو بریك قاعدهٔ (اب) واقعند ﴾
وچونکه درمثلثین (ا ب م) و (ل د ی)
ضلع (ب ا) برابر (د ل) و ضلع (ب م) برابر (د ی) میباشد
ونیز زاویهٔ (ب م ا) بمساوی زاویهٔ (د ی ل) است
لهذا قواعد (ا م) و (ل ی) باهم برابر و مثلثین نیز باهم متساوی میباشند
بنابراین متوازی الاضلاع (ل ب) که بمساوی (ص ا) ثابت شده است
برابراست با متوازی الاضلاع (د م)
یعنی (د م) و (ص ا) باهم متساوی میباشند ﴾
واما مستطیل (س م) باندك توجه ثابت شود که بمساوی (ل ج) است
و بحکم ش ۳) (ل ج) بمساوی (ا ق) است
زیراکه هردو بریك قاعدهٔ (ا ج) واقعند
لهذا مربع (ص ا) و (ا ق) بمساوی مربع (د ج) میباشند ﴾

(۲) درعلم هندسه این شکل کثیر النفع (یعنی ۴۷) معروف و موسوم است بشکل عروس
گویند موجد آن حکیم فیثاغورس (صوری است) ﴾
افسانهای عجیب برآین حکایات ساخته اند غریب تر آنیکه گویند
زمانیکه برا دستامر این شکل وقوف حاصل شده بود
جهت شکرانهٔ این موهبت حیوانات را برای قربانی بمعابد خود هدیه فرستاده بودند
هرجهت اساتید متاخرین طرق متعدده برای اثبات این معنی نگیخته
وانواع اشکال ساخته اند که ازآن تشفی خاطر مبتدیان میشود
باین معنی که مربع وتر هر مثلث قائم الزاویه برابر است
با دو مربع که بر باقی ضلعین آن ساخته شوند
فیجمله از اشکال این شکل که نتیجهٔ افکار مهندسین است
برای بصیرت طالب العلم در اینجا ثبت و مذکور میشود

مثلاً (ب ج د) مثلث قائم الزاویه است و بر وتر
آن مربع (ج د س ص)
و بر ضلعین آن مربع (ب د ط ع) و (ب ج ق ل) ساخته شده اند

مرکز مربع (ب ج ق ل) را پیدا کن
(در نقطهٔ کہ دو قطر مربع تقاطع نمایند مرکز مربع میباشد و این دو قطر
در شکل مذکوره مرتسم نشده اند)
و برین مرکز خارج کن خطی کہ متوازی باشد با (ج د)
و خطِ دیگر بران عمود کن کہ آنہم از مرکز بکذرد
پس این مربع در چهار ذوار بعۃ الاضلاع منقسم خواهد شد
کہ از ہر حیثیّت باہم متساوی خواهند بود ﴿م﴾
و در ہر ضلعی از اضلاع مربع (ج د س ص) از نقاطِ وسط
خارج کن خطوطِ مستقیمہ را کہ متوازی باشند با (ب ج) و (ب د)
در اینصورت حصصِ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ باہم منطبق خواهند شد ﴿م﴾

دوم

فرض کن (ا ب ج) مثلّثِ قائم الزّاویہ و (ا) زاویۂ قائمہ
پس مربع مرتسم بر وتر (ج ب) مساوی خواهد بود با دو مربع (ب ا) و (ا ج)
وضع شکل = (بحکم ش ۴۶) بساز بر (ا ب) مربع (ا ب د س) را
و (بحکم ش ۳) قطع کن از (د س) و (س ا) مقدارِ (د ص) و (س ط) را
کہ ہر یکی مساوی باشد با (ا ج)
(بحکم ش ۴۶) بساز بر (س ط) مربع (س ط ق ع) را
پس (بحکم ش ۱۴) (ع س) و (س ط) در یک خطِ مستقیم خواهند بود ﴿م﴾
وصل کن (ج ق) و (ق ص) و (ص ب) را
لهذا شکل (ج ق ص ب) مربع میباشد ﴿م﴾
ثبوت = (ج ا) مساویست با (ط س)
بیفزای بر ہر یکی (ا ط) را
پس (ج ط) مساویست با (ا س)
و کذلک خطِ (ص ع) مساویست با (س د) ﴿م﴾
لهذا اربعہ مستقیمہ یعنی (ب ا) و (ج ط) و (ص ع) و (ب د) باہم متساویند ﴿م﴾
و در مثلّثین (ب ا ج) و (ج ط ق) خطِ (ب ا) مساویست با (ج ط)
و (ا ج) مساویست با (ط ق)
ایضاً زاویۂ متشکله یعنی (ب ا ج) مساویست با زاویۂ (ج ط ق)
و ہر یکی قائمہ میباشد ﴿م﴾

لهذا (بحکم ش ۴) مثلثین (ب ا ج) و (ج ط ق) از هر حیثیت متساویند

وکذلك چهار مثلث یعنی (ب ا ج) و (ج ط ق) و (ص ع ق) و (ب د ص) باهم متساویند

لهذا خطوط مستقیمهٔ (ب ج) و (ج ق) و (ق ص) و (ص ب) باهم متساوی میباشند

یعنی شکل (ج ق ص ب) مربع میباشد)

ونیز (بموجب مفروض) زاویهٔ (ج ب ا) مساویست با زاویهٔ (ص ب د)

بیفزای بر هر یکی زاویهٔ (ا ب ص) را

پس زاویهٔ (ج ب ص) مساویست با زاویهٔ (ا ب د)

لهذا زاویهٔ (ج ب ص) قائمه میباشد

بنابراین (بحکم حد ۳۰) شکل (ج ق ص ب) مربع است

که بر وتر (ب ج) مرتسم گردید)

و شکل (ط ق ع س) مساویست با مربع ضلع (ا ج)

پس شکل (ج ق ص ب) مرتسم گردیده است بر شکل غیر منتظم (ا ب ص ق ط)

و بمثلثین (ب ا ج) و (ج ط ق)

لهذا مربع (ج ق ص ب) مساویست

با مثلثین (ب ا ج) و (ج ط ق) مع شکل غیر منتظم مذکوره)

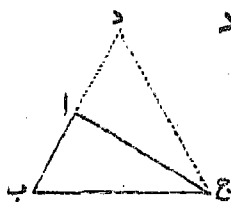
ولکن این اشکال ثلاثه که مذکور شد مشتمل اند بر مربعات (ق ع س ط) و (ا س د ب)

لهذا مربع (ج ق ص ب) مساویست با دو مربع (ق ع س ط) و (ا س د ب)

یعنی مربع مرتسم بر (ب ج) مساویست با دو مربع ضلعین (ج ا) و (ا ب)

شکل (۴۸) اثباتی

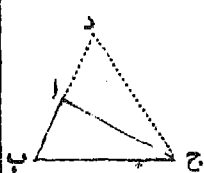
هرگاه مربع مرتسم بر یك ضلع مثلث مساوی باشد با ان مربعها

که بر باقی ضلعین ان مرتسم شوند پس زاویهٔ مشکله این ضلعین قائمه

خواهد بود

فرض کن در مثلث (ا ب ج) مربع مرتسم بر ضلع (ب ج)

مساویست با مربع مرتسم بر ضلع (ا ب) و (ا ج)

پس زاویهٔ (ب ا ج) قائمه خواهد بود)

وضع شکل = (بحکم ش ۱۱) از نقطهٔ (ا) خارج کن خطِ (اد) را
کہ با (اج) زاویهٔ قائمہ پیدا کند
و (بحکم ش ۳) (اد) را برابرِ (ب ا) معیّن کن
وصل کن (دج) را ۔

ثبوت = چونکہ (دا) مساویست با (ب ا)
پس مربعِ (دا) مساوی مربّعِ (ب ا) میباشد ۔
از این متساویات بہر یکی بیفزای مربعِ (اج) را
پس (بحکم علم ۲) مربعِ (دا) و (اج) مساوی باشد با مربعِ (اب) و (اج)
زیراکہ زاویۂ (داج) قائمہ مرتسم شدہ است ۔
لھذا (بحکم ش ۴۷) مجموعۂ مربع (دا) و (اج) مساوی مربع (دج) میباشد ۔
ولکن (بموجب مفروض) مربع (بج) مساویست با مربعہای (ب ا) و (اج)
لھذا مربع (دج) مساوی مربع (بج) میباشد ۔
بنابراین ضلعِ (دج) برابر است با ضلعِ (بج)
وچونکہ ضلعِ (دا) برابرِ ضلعِ (ب ا) معیّن شدہ است
و (اج) مشترک است در مثلثین (داج) و (باج)
لھذا ضلعینِ (دا) و (اج) مساویند با ضلعینِ (ب ا) و (اج) متوافق بانظائر خود ۔

واما در فوق ثابت شد که قاعدهٔ (دج) مساویست باقاعدهٔ بج

لهذا (بحکم ش) زاویهٔ (داج) مساوی شد با زاویهٔ (باج)

ولکن زاویهٔ (داج) قائمه میباشد

پس زاویهٔ (باج) نیز قائمه است)

لهذا مربع مرتسم بر یک ضلع مثلث الخ

(این شکل عکس شکل ۴۷ میباشد)

(اقلیدس عکس اشکال را برهان خلف ثابت کرده

ولکن در عکس این شکل ثبوت عینی را بکار برده است)

تفهیم =

(۱) اضلاع مثلث بحسب اعداد هرگاه سه وچهار وپنج باشند
زاویهٔ میان ضلع سه وچهار قائمه خواهد بود)

مثلاً $۳^۲ + ۴^۲ = ۱۶ + ۹ = ۲۵ = ۵^۲$

یعنی مجموعهٔ سه در سه که نه باشد وچهار در چهار که شانزده باشد بیست وپنج است
وضلع سوم که پنج است انهم پنج در پنج بیست وپنج میباشد)

(بدانکه محاسبین در علم حساب جهت اختصار علامتی قرار داده اند
مثلاً این (۲) علامت یعنی عدد ریزهٔ دو که فوق عدد جلی مرقوم است
مراد اینست که عددِ جلی که تحتانی واقع شده است یک بار در نفسِ خود ضرب شود)
مثلاً سه در سه وچهار در چهار وپنج در پنج)
واین (+) علامت یعنی خط عرضی که خط دیگر بران عموداً تقاطع نموده نشانِ
جمع است یعنی عدد ماقبل وما بعد جمع شود)
واین (=) یعنی دو خط عرضی که متوازیند نشانِ مساوات است یعنی عدد یا اعداد
ماقبل مساوی عدد یا اعدادِ مابعد است)
مثلاً سه مضروب در نفسِ خود مع چهار مضروب در نفسِ خود مساوی شانزده (۱۶)
مع نُه که مساویست با پنج مضروب در نفسِ خود)

(۲) متقدمین قواعدی چند برای دریافت نمودنِ اعدادِ صحیح
که ازان اعدادِ صحیحه اضلاع مثلث قائم الزاویه تعبیر باشد بیان نموده اند
بعضی ازان قواعد در اینجا مذکور میشود)

قاعدهٔ فیثاغورس

(۱) هر عددِ طاق را که میخواهی برای یک ضلعِ مثلث فرض کن
(۲) از مربعِ عددِ مفروض عدد یک را تفریق نما و نصف باقی را
برای ضلعِ دوم اختیار کن
(۳) بر مربعِ عددِ مفروض عدد یک را اضافه کن و نصفِ مجموعه را اختیار کن
که ضلعِ سوم تعبیر از آنست ہے
یعنی اضلاعِ ثلاثه که این قسم تحصیل شود تعبیر کننده مثلثِ قائم الزاویه را ہے
مثلاً عددِ پنج را فرض کن که یک ضلع میباشد
پس $\frac{1}{2}$(۲۵−۱) = ۱۲ ہے ایضاً $\frac{1}{2}$(۲۵+۱) = ۱۳ ہے
لهذا عددِ ۵ و ۱۲ و ۱۳ عدد مطلوبست ہے
زیراکه ۵² + ۱۲² = ۲۵ + ۱۴۴ = ۱۳² میباشند ہے
این $\frac{1}{2}$ علامت که عددی فوق خطِ عرضی و عددی تحتِ آن مرقوم است
نشانِ تنصیف است یعنی یک قسمت از مقداریکه تقسیم در دو قسمت
شده است ہے
واین (۲۵−۱) علامت دلالت کند براینکه نتیجهٔ جملهٔ اعدادیکه میانِ
قوسین محدود است محکوم است بعلائمِ ماقبل و مابعد خود
مثلاً در فقرهٔ اول مراد اینست که نصفِ جملهٔ قوسیه مساویست با
دوازده ہے
واین (−) علامت یعنی خط ریزهٔ عرضی نشانِ تفریق است یعنی علامت بعد
یا اینکه عدد کوچک از عدد بزرگ تفریق شود
چنانچه در فقرهٔ اول از عددِ ۲۵ که یک تفریق شود نصفِ باقی
دوازده باشد ہے

قاعدهٔ افلاطون

(۱) هر عددِ جفت را که میخواهی برای یک ضلع فرض کن ہے
(۲) از مربعِ نصفِ عددِ مفروض عدد یک را تفریق کن ہے
(۳) بر مربعِ نصفِ عددِ مفروض عدد یک را اضافه کن ہے
پس عددِ مفروض و اعداد دیگر این قسم حاصل شود
تعبیر نماید مثلثِ قائم الزاویه را ہے
مثلاً عددِ شش را برای یک ضلع اختیار کن ہے
پس ۳² − ۱ = ۸ ہے
و ۳² + ۱ = ۱۰ ہے
لهذا عدد ۶ و ۸ و ۱۰ عدد مطلوب است ہے
زیراکه ۶² + ۸² = ۶۴ + ۳۶ = ۱۰۰ = ۱۰² میباشند ہے

قاعدهٔ متداوله

(۱) هر قسم دو عدد را اگر میخواهی فرض کن که از یک جنس باشد
و مجموعهٔ مربع هر دو را دریافت کن که یک ضلع خواهد بود
(۲) فرقِ مربعات مذکوره را پیدا کن که ضلع دیگر خواهد بود
(۳) حاصلِ ضربِ دو عددِ مفروضه را مضاعف کن که ضلع سوم است ٭

مثلاً عدد ۴ و ۵ را فرض کن ٭

پس $۴^{۲} + ۵^{۲} = ۴۱$ ٭

و $۵^{۲} - ۴^{۲} = ۹$ ٭

و $۴ \times ۵ \times ۲ = ۴۰$ ٭

لهٰذا اضلاعِ مثلثِ مطلوب ۹ و ۴۰ و ۴۱ میباشند ٭

این (×) علامت یعنی دو خطِ متقاطع حمائلی نشان ضرب است ٭
یعنی مقدار ماقبل در مقدارِ مابعد ضرب شود حاصلِ ضرب
باز در مقدارِ مابعد خود ضرب شود ٭
مثلاً ۴ ضرب در ۵ حاصل ۲۰ و باز ضرب در ۲ حاصل ۴۰ میباشد

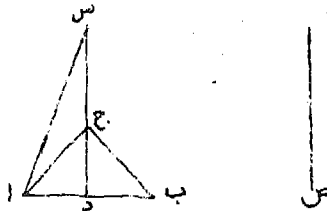
درانیجا توضیح علائم حسابیه زیاده ازین لازم نیست
و اینهم که ذکر شد محض برای تشویق مبتدیان بسوی علم حساب مرقوم افتاده ٭

اسلوب تحلیلی و ترکیبی

مراد اینست که چون خواسته باشیم خواص شکلی را دریافت نمائیم
طریقهٔ که برای این عمل بکار رود آنرا اسلوبِ تحلیلی گویند
و آن اینست که برای حصول مدّعا دعوی شکل را در ابتدا ثابت فرض کنیم
و در آخر بلا ثانی سلسلهٔ متسلسله تا نتیجه را استنباط نمائیم
و می بینیم که آن نتیجه مطابق است با یکی از آن نتائج که تاکنون ببراهین ثابت شده اند
یا نیست
اگر هست پس تصدیق دعوی ثابت والّا باطل است
و امّا هرگاه موافق آن نتائج که بتحقیقاتِ خودِ ما ثابت شده اند
خواسته باشیم شکلی بنا کنیم
پس این عمل را اسلوب ترکیبی گویند
و آن اینست که در ابتدای شکل از ابتدا نتائج مثبته را بکار بریم
و از این عمل شکلِ نوی مرتسم خواهد گردید ٭

بدانچونکه حلّ این مقاصد موقوفست بر ذهانت و کثرتِ مشقِ مبتدی
لهٰذا درین باب زیاده ازین هدایات لازم نباشد ٭

اسلوب تحلیلی

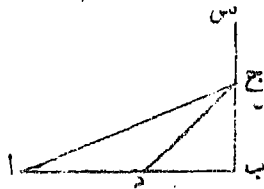
مثلث متساوی الساقین که قاعدهٔ آن معلوم باشد
و نیز مجموعهٔ یک ساق مع آن عمود که از راس بر قاعده خارج شود معلوم باشد

فرض کن (اب) قاعدهٔ معلوم و (ص) مجموعهٔ یک ساق
مع آن عمود که از راس بر قاعده خارج شود میباشد
برای حصول مدعا تصدیق کن که (ا ب ج) مثلث مطلوب است
از (ج) خارج کن بر (اب) عمود (ج د) را
پس (اب) بر نقطهٔ (د) تنصیف خواهد شد
و سرکا (دج) تا نقطهٔ (س) خارج شود
فهمیکه (ج س) مساوی (اج) باشد و (اس) را وصل نمائیم
پس (بحکم ش ۵) زاویهٔ (ج ا س) مساوی زاویهٔ (ج س ا) خواهد بود
اکنون ملاحظه کن پیش از آنکه مقام (ج) معلوم باشد
خط مستقیم (د س) و (ا س) را توان خارج نمود
لهذا از این عمل روش راستا مثلث معلوم شد
یعنی هرگاه نتیجهٔ عمل موافق سؤال واقع نمیشد تصدیق باطل بود
حال همین مطلب را باسلوب ترکیبی بیان کنیم

اسلوب ترکیبی

تنصیف کن (اب) را بر نقطهٔ (د)
از نقطهٔ (د) خارج کن عمود (د س) را
(د س) را برابر (ص) معین کن
و وصل کن (اس) را
در (س ا) بر نقطهٔ (ا) بساز زاویهٔ (س ا ج) را که مساوی (ا س د) باشد
و وصل کن (ج ب) را
پس (اج ب) مثلث مطلوب میباشد
زیراکه (بحکم ش ۳) مثلث مذکور متساوی الساقین است
یعنی (اج) مساوی (ب ج) است
چونکه زاویهٔ (س ا ج) مساوی (ا س ج) میباشد
لهذا (س ج) مساویست با (اج)

بیفزای بر یکی از این متساویات (ج د) را
پس مجموعۂ (اج) و (ج د) مساویست با مجموعۂ (س ج) و (ج د)
کہ مساویست با (س د)
یعنی مجموعۂ (اج) و (ج د) بمساویٔ (ص) میباشد ہ۔

ایضاً اسلوب تحلیلی

خط مستقیم معلوم را در دو قسمت چنان تقسیم کن کہ مربع یک
قسمت دو چند باشد نسبت بمربع قسمتِ ثانی ہ۔

فرض کن (اب) خطِ مستقیم معلوم است
برای حصول مدّعا قبول کن در (اب) تقسیمیکہ مطلوبست در نقطۂ (د) شدہ
یعنی مربع (اد) دو چند است نسبت بمربع (د ب)
اکنون بخاطر بیاور کہ در مثلثِ قائمۃ الزاویہ متساوی الساقین
مربع وتر دو چند است نسبت بمربع یک ضلع آن
لہذا ازین ظاهر میشود کہ بر (اب) عمود (ب ج) قائم کنیم
قسمیکہ (ب ج) بمساویٔ (ب د) باشد و (د ج) را وصل نمائیم
پس (بحکم ش ۴۷) مربع (دج) دو چند است نسبت بمربع (د ب)
لہذا (دج) بمساویٔ (اد) خواهد بود ہ۔ هرگاه نباشد بتصدیق دعوی باطل است ہ۔
هرگاه (اج) را موصول سازیم معلوم شود
کہ زاویۂ (داج) مساویست با زاویۂ (دج ا)
پس (بحکم ش ۳۲) زاویۂ خارجۂ (ج د ب) دو چند است نسبت بہ (داج)
لکن زاویۂ (ج د ب) نصف قائمہ میباشد
لہذا زاویۂ (داج) ربع قائمہ است ہ۔

ایضاً اسلوب ترکیبی

بر (اب) از نقطۂ (ب) خارج کن عمود (ب س) را
و از (ا) خارج کن (اج) را
قسمیکہ زاویۂ (ب اج) بمساویٔ ربع قائمہ باشد ہ۔

بر نقطۂ تقاطع (اج) د (ب ج) بساز زاویۂ (اج د) را
کہ برابر باشد با زاویۂ (ج ا د)
لهذا تقسیم (اب) چنانکہ منظور است بر نقطۂ (د) خواهد بود
زیراکہ زاویۂ (دج ا) مساویست با زاویۂ (داج)
لهذا (بحکم ش ۵) (دا) برابر است با (دج)
ایضاً چونکہ (بحکم ش ۳۲) زاویۂ (ب دج) مساویست
با مجموعۂ زاویتین (ب اج) و (اج د)
لهذا (ب دج) نصف قائمہ میباشد
وچونکہ زاویۂ (ب) قائمہ میباشد
پس (بحکم ش ۳۲) (ب ج د) هم نصف قائمہ است ۔
بنابراین زاویۂ (ب دج) برابر است با زاویۂ (ب ج د)
لهذا (ب د) مساویست با (ب ج)
ازاین بیان واضح شود کہ مربع مرتسم بر (دج)
(بحکم ش ۴۷) دوچند است نسبت بمربع (د ب)

یعنی مربع مرتسم بر (اد) دوچند است نسبت بمربع (د ب)

مساوات متحدۂ مثلثات

مشق =

(۱) هرگاه در مثلثی از راس بر قاعدۂ آن عمود خارج شود وتنصیف قاعدہ نماید
آن مثلث متساوی الساقین خواهد بود ۔
(۲) هرگاه خط منصف زاویۂ راس مثلث بر قاعدہ عمود باشد
آن مثلث متساوی الساقین خواهد بود ۔
(۳) هرگاه خط منصف زاویۂ راس مثلث قاعدہ را نیز تنصیف نماید
آن مثلث متساوی الساقین خواهد بود ۔

(خط تنصیف کنندہ خارج کن وبساز شکل ۱۶ د ا)
(۴) هرگاه از اطراف قاعدۂ مثلث یک زوج خطوط خارج شدہ باشد
وبا اضلاع مثلث زوایای متساویہ تشکیل نماید وباهم برابر باشند
پس آن مثلث متساوی الساقین خواهد بود ۔
(۵) هرگاه در مثلثی از اطراف قاعدہ عمائد بر اضلاع خارج شدہ
باهم مساوی باشند
آن مثلث متساوی الساقین خواهد بود ۔
(۶) بر یک قاعدۂ (اب) وبر جهات مخالف دو مثلث (ابج) و (اب د)
چنان واقع شدہ اند کہ (اج) برابر است با (اد) و (بج) با (ب د)

پس ثابت کن خطی که واصل (ج د) است بر (اب) عمود خواهد بود ۔

(۷) هرگاه از اطراف قاعدهٔ مثلث متساوی الساقین
براضلاع متقابل عمائد خارج شوند
پس خطی که از نقطهٔ تقاطع عمائد براس مثلث واصل شود
زاویهٔ راس را تنصیف خواهد نمود ۔

(۸) (ابج) مثلثی است که زاویهٔ راس آن (ب اج) از خط (اد) تنصیف شده است
وبر (اد) از نقطهٔ (ب) عمود (ب س) خارج شده است
وچنان ممتد شده که با (اج) یا (اج) ممدوده در نقطهٔ (ص) موصول شد
ثابت کن (ب س) مساوی (س ص) است ۔

(۹) (ابجد) ذو اربعة الاضلاعی است و (اب) برابر است با (اد) و (بج) با (دج)
پیدا کن شکل را و ثابت کن
که خط (اج) تنصیف میکند آن زوایا را که با آنها موصول شده است
برخلاف خط (ب د) که تنصیف نکند ۔

(۱۰) در ذو اربعة الاضلاع (ابجد) اضلاع مقابل یعنی (اد) و (بج) متساویند
واوتار یعنی (اج) و (ب د) هم متساوی
پس هرگاه (اج) و (ب د) در نقطهٔ (س) تقاطع نمایند
ثابت کن که مثلثین (اس ب) و (دس ج) متساوی الساقین میباشند ۔

(۱۱) در مثلثی هرگاه مجموعهٔ دو زاویه مساوی باشد با زاویهٔ سوم
پس ضلعیکه اعظم است دوچند خواهد بود نسبت بخطیکه از نقطهٔ وسط آن ضلع
تا زاویهٔ مقابل خارج شود ۔

(۱۲) در دو مثلث قائم الزاویه که اوتار آن باهم متساوی باشند
ونیز یک ضلع یک مثلث مساوی باشد بایک ضلع مثلث دیگر
ثابت کن که سطوح هردو باهم متساویند ۔

غیر مساوات

(۱۳) در مثلث (ابج) هرگاه (اج) اطول نباشد نسبت به (اب)
ثابت کن خطی که از راس (ا) بر قاعدهٔ (بج) خارج شود
اقصر خواهد بود نسبت بخط (اب)

(۱۴) در مثلث (ابج) زاویهٔ (باج) از خط مستقیم (اد) تنصیف میشود
ثابت کن (با) اطول است نسبت به (ب د) و (جا) نسبت به (ج د)

(۱۵) از یک نقطهٔ هرقدر خطوط تا بخط مستقیمی خارج شوند
در آنها خط عمود از همه اقصر خواهد بود
و در آن خطوط مستقیمه که خارج میشوند
خطیکه اقرب بعمود است اقصر است نسبت بخطیکه ابعد واقع میشود
ونیز غیر ممکن است که درین خطوط زیاده از دو خط متساوی یافته شود

کہ ہر یکی ازاین دو در یک جانب عمود خواهد بود)ہ۔

(۱۶) نقطۂ کہ در مثلث واقع میشود مجموعۂ ابعاد ثلاثۂ آن تا زوایای مثلث زیادہ است از نصف مجموعۂ اضلاع آن و کمتر است از مجموعۂ آن)ہ۔

(۱۷) مجموعۂ اضلاع شکل ذو اربعۃ الاضلاع زیادہ است از اوتار آن)ہ۔

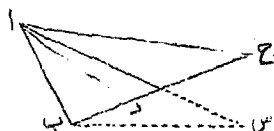
(۱۸) مجموعۂ اوتار ذو اربعۃ الاضلاع اقصر است نسبت بمجموعۂ خطوط اربعہ کہ از یک نقطہ معلوم تا زوایای آن خارج شوند

(۱۹) مجموعۂ ذو ضلع مثلث اطول است نسبت بدو چند خط متوسط کہ تنصیف کند ضلع سوم را)۔

(۲۰) در ہر مثلث مجموعۂ اضلاع اطول است از مجموعۂ خطوط متوسطہ آن)ہ۔

(۲۱) در مثلثات کہ خطوط منصّف زوایا بر ضلع مقابل میرسند
اوّل = منصّف زاویۂ حادّہ اطول از نصف ضلع مقابل)ہ۔
دوم = منصّف زاویۂ منفرجہ اقصر است از نصف ضلع مقابل)ہ
سوم = در مثلث قائم الزاویہ متساوی الساقین
منصّف زاویۂ قائمہ برابر است با نصف ضلع مقابل)۔

(۲۲) اقطار معین متساوی نباشند)ہ۔

(۲۳) زاویۂ راس مثلث کہ مابین اضلاع غیر متساوی واقع باشد ہرگاہ از راس آن خط متوسط و خط منصّف خارج شوند پس خط متوسط مابین ضلع اطول و خط منصّف واقع خواهد شد

مثلاً در مثلث (ا ب ج) خط متوسط (ا س) و خط منصّف (ا د) میباشد

(۲۴) زاویۂ راس مثلثی کہ مابین ضلعین غیر متساوی واقع شود ہرگاہ ازآن زاویہ سہ خط خارج شوند یعنی خط منصّف و خط متوسط و سوم عمود بر قاعدہ پس اوّلی در مقدار و مقام مابین ہر دو خواهد بود)ہ۔

(در متساوی الساقین ہر سہ منطبق شوند)

خطوط متوازی و متوازی الاضلاع

(۲۵) ہرگاہ بر دو خط مستقیم متوازی خط مستقیمی واقع شود)ہ۔

وزوایای داخلهٔ یکجهت آن تنصیف شوند
پس خطوط منصّف زوایا بر قائمه تقاطع خواهند نمود ۵ـ

(۲۶) خطیکه تنصیف زاویه میکند هرگاه از یک نقطهٔ آن
خطوط مستقیمهٔ متوازی با اضلاع و تا اضلاع خارج شوند
از خروج آن شکل معین یا مربع تشکیل خواهد یافت ۵ـ

(۲۷) خط (اب) را (ج د) در نقطهٔ (د) قطع میکند
زوایای هردو جانب تنصیف شده اند
پس هرگاه در (دج) از یک نقطهٔ مثلاً (س) خط (ص س ط)
متوازی (اب) خارج شود
و با خطوط منصّفه در (ص) و (ط) وصل شود
ثابت کن (س ص) و (س ط) باهم متساویند ۵ـ

(۲۸) هرگاه با خطوط مستقیم متوازی خط مستقیم دیگر موصول شود
نقطهٔ وسط آن با خطوط متوازیه بر فاصلهٔ متساوی خواهد بود ۵ـ

(۲۹) ا ب ج مثلث متساوی الساقین است
خط (د س) را متوازی (ب ج) چنان خارج کن
که با اضلاع متساویه بر نقطهٔ (د) و (س) موصول شود
و (ب د) و (د س) و (س ج) باهم متساوی باشند ۵ـ

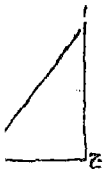
(۳۰) (اب) و (ج د) دو خط مستقیمند و در (اب) نقطهٔ (س) معلوم است
ولکن نقطهٔ در آن مثلاً (ص) پیدا کن
که فاصله (ص س) مساوی باشد با عمودیکه از (ص) بر (ج د) خارج شود

(۳۱) هرگاه از نقطهٔ وسط ضلع مثلث خط متوازی با قاعده خارج شود
آن خط ضلع دیگر را هم تنصیف خواهد نمود ۵ـ

(۳۲) خط مستقیمیکه نقاط وسط ضلعین مثلث را وصل دهد
مساوی نصف ضلع سوم خواهد بود ۵ـ

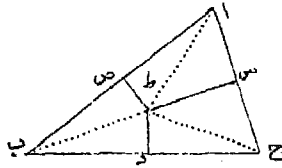
(۳۳) در نقاط وسط اضلاع مثلث خطوط ثلاثه که موصول شوند
مثلث را در چهار مثلث متساوی تقسیم خواهند نمود
که از هر حیثیت باهم متساوی باشند ۵ـ

(۳۴) خط مستقیمیکه از راس مثلث تا قاعده خارج شود
تنصیف خواهد شد از خطیکه نقاط وسط باقی ضلعین را وصل نماید

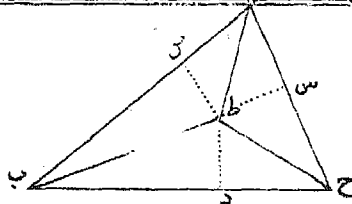
(۳۵) در شکل ذوزنقه خطیکه نقاط وسط اضلاع غیر متوازیه را وصل دهد

متوازی خواهد بود با اضلاع متوازیۂ آن
وازنقطۂ وسطِ اوتار خواهد گذشت ۵م

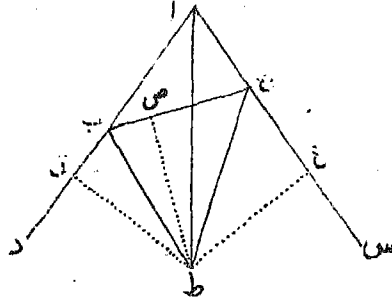
(۳۶) درشکل ذو زنقہ خطی کہ نقاطِ وسطِ اضلاعِ غیر متوازیۂ انرا وصل نماید
بمساوی نصفِ مجموعۂ ضلعین متوازیۂ آن خواهد بود
وفرقِ حصصِ آن کہ مابین وترین واقع شوند
بمساوی نصفِ فرقِ ضلعینِ متوازیہ خواهد بود ۵م

تعریف خطوط مشترک النقطۂ مثلثات

(۱) عمائدیکہ از نقاطِ وسطِ اضلاعِ مثلث خارج شوند مشترک النقطہ میباشند ۵م
یعنی در یک نقطہ موصول شوند ۵م

فرض کن مثلث (ا ب ج) را نقاطِ وسط (د) و (س) و (ص) است
پس عمائدیکہ بر نقاطِ مذکورہ قائم شوند مشترک النقطہ خواهند بود ۵م
وضع شکل = بر (ا ب) و (ا ج) از نقطہ (ص) و (س) خارج کن عمائد را
چونکہ غیر ممکن است عمائد مذکورہ متوازی باشند لابد در یک نقطۂ مثلاً
(ط) موصول خواهند شد ۵م
وصل کن (ط د) را
پس (ط د) بر (ب ج) عمود خواهد بود ۵م
وصل کن (ط ا) و (ط ب) و (ط ج) را
ثبوت = چونکہ در مثلثین (ط س ا) و (ط س ج) ضلع (س ا) بمساوی
(س ج) است
و (س ط) مشترک در هر دو
و زاویۂ (ط س ا) مساوی با زاویہ (ط س ج) زیراکہ هریکی قائمہ میباشد
لهذا بحکم ش ۸ ضلع (ط ا) مساویست با ضلع (ط ج)
وبهمین تفصیل در مثلثین (ط ص ا) و (ط ص ب) ثابت توان نمود کہ (ط ا)
برابراست با (ط ب)

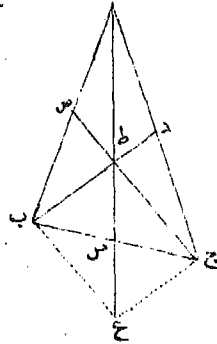
از این بیان معلوم شد که (ط ا) و (ط ب) و (ط ج) باہم متساویند
پس چونکہ (د) نقطۂ وسط است در ضلع (ب ج)
و نیز چونکہ در مثلّث متساوی الساقین خطیکہ از راس بنقطۂ وسطِ قاعدہ
برسد بران عمود میباشد
لهذا عمائد ثلاثہ یعنی (ط د) و (ط س) و (ط ص) بر نقطۂ (ط) موصول
میشوند
و مقصود همین ثبوت بوده است)م

(۲) خطوط منصفۂ زوایا مثلّث بر یک نقطہ میرسند

فرض کن در مثلّثِ (ا ب ج) زاویتین (ا ب ج) و (ب ج ا) از خطوطِ مستقیم
که در نقطۂ (ط) موصولند تنصیف میشوند
وضع شکل = وصل کن (ط ا) را
فعلاً باید ثابت کنیم که (ا ط) تنصیف میکند زاویۂ (ب ا ج) را
بر اضلاع مثلث از نقطۂ (ط) خارج کن عمائدِ (ط د) و (ط س) و (ط ص) را
ثبوت = چونکہ در مثلّثین (ط ب د) و (ط ب ص) زاویۂ (ط ب د)
مساوی است با زاویۂ (ط ب ص)
و زاویۂ (ط د ب) مساوی با زاویۂ (ط ص ب) زیرا که هر یکی قائمہ میباشد
و ضلع (ط ب) در هر دو مشترک
پس (بحکم ش ۲۶) ضلع (ط د) برابر است با (ط ص)
همین طور در مثلّثین (ط ج د) و (ط ج س) ثابت توان نمود که ضلع
(ط د) برابر است با (ط س)
پس (ط د) و (ط س) و (ط ص) باهم متساویند
و چونکہ در مثلّثین (ط ص ا) و (ط س ا) زاویتین (ط ص ا) و (ط س ا)
باهم متساویند
زیرا که هر یکی قائمہ میباشد و وترِ (ط ا) مشترک در هر دو
و (ط ص) مساوی (ط س)
لهذا (بحکم ش ۲۶) زاویۂ (ص ا ط) مساویست با زاویۂ (س ا ط)
یعنی زاویۂ (ب ا ج) را خط (ط ا) تنصیف میکند
بنابرین در هر مثلث منصّفہ زوایا در یک نقطہ مثلاً (ط) موصول
میشوند)م

(۳) در هر مثلّث خطوطِ منصّفهٔ دو زاویهٔ خارجه و یک زاویهٔ داخله مشترک النّقطه میباشند

فرض کن در مثلّث (ا ب ج) ضلعین (ا ب) و (ا ج) تا نقطهٔ (د) و (س) ممتد شده اند
و زوایای خارجه یعنی (د ب ج) و (س ج ب) را خطوط مستقیمه تنصیف نموده در نقطهٔ (ط) موصول شده اند
وضع شکل = وصل کن (ا ط) را
حال باید ثابت شود که زاویهٔ (ب ا ج) را خطِ (ا ط) تنصیف میکند
بر اضلاع مثلث از نقطهٔ (ط) خارج کن عمائد (ط ص) و (ط ع) و (ط ق) را
ثبوت = چونکه در مثلّثین (ط ب ص) و (ط ب ق) زاویه (ط ب ص) مساویست با زاویهٔ (ط ب ق)
و نیز زاویه (ط ص ب) مساویست با زاویهٔ (ط ق ب) زیرا که هر یکی قائمه میباشد
و (ط ب) در هر دو مشترک
لهذا (بحکم ش ۲۶) ضلع (ط ص) مساویست با (ط ق)
همین قسم ثابت میشود که در مثلّثین (ط ج ص) و (ط ج ع) ضلع (ط ص) برابر است با (ط ع)
پس (ط ص) و (ط ع) و (ط ق) باهم متساویند
و چونکه در مثلّثین (ط ق ا) و (ط ع ا) زاویهٔ (ا ق ط) مساویست با زاویهٔ (ا ع ط) زیرا که هر یکی قائمه میباشد
و نیز (ط ا) مشترک است و ضلع (ط ق) برابر با ضلع (ط ع)
لهذا (بحکم ش ۲۶) زاویهٔ (ق ا ط) مساویست با زاویهٔ (ع ا ط)
یعنی زاویه (ب ا ج) را خط (ا ط) تنصیف مینماید
بنابراین خطوط منصّفهٔ زوایا یعنی (ب ط) و (ا ط) و (ج ط) در یک نقطه موصول شده اند
و تنصیف نموده اند دو زاویهٔ خارجه و یک زاویه داخله را

یعنی

یعنی زاویهٔ (د ب ج) و (س ج ب) و (ب ا ج) را ٭

(۴) خطوط متوسطهٔ در هر مثلث مشترک النقطه میباشند

فرض کن (ا ب ج) مثلث و دو متوسط آن (ب د) و (ج س) است که بر نقطهٔ (ط) متقاطع میباشند

وضع شکل = وصل کن (ا ط) را و خارج کن از قسمیکه در (ب ج) بر نقطهٔ (ص) برسد ٭

پس متوسط سوم (ا ط) خواهد بود ٭

ایضاً از نقطهٔ (ج) خارج کن (ج ع) را که متوازی باشد با (د ب) و ممتد ساز (ا ص) را که در نقطهٔ (ع) با خط (ج ع) موصول شود

وصل کن (ب ع) را

ثبوت = چونکه در مثلث (ا ع ج) ضلع (ا ج) را نقطهٔ وسط (د) است

و (ج ع) متوازی است با (د ط)

لهذا (ط) نقطهٔ وسط (ا ع) است = ببین در صفحه ۱۳۷ سؤال ۳۱

ایضاً چونکه در مثلث (ا ب ع) ضلعین (ا ب) و (ا ع) را نقاط وسط (س) و (ط) است

لهذا (ب ع) متوازی (ط ع) خواهد بود ٭ (ببین در صفحه ۱۳۷ سؤال ۳۱)

یعنی (ط ج) متوازی (ب ع) است ٭

بنابراین (ب ع ج ط) متوازی الاضلاع میباشند ٭

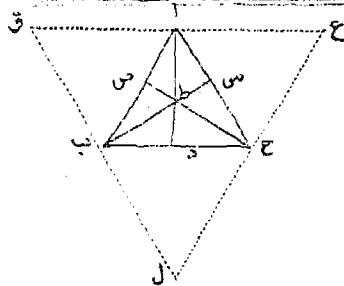
و چون اقطار متوازی الاضلاع یکدیگر را تنصیف میکنند

لهذا (ص) نقطهٔ وسط ضلع (ب ج) است

یعنی (اص) متوسط مثلث (ا ب ج) است
پس ثابت شد کہ دو مثلث ہر سہ متوسط در یک نقطہ موصول میشوند)

نتیجۂ صحیح

در مثلث ہر سہ متوسط یکدیگر را در نقطۂ مشترکہ تثلیث مینمایند)
وقیمت اطول آن بطرف زاویہ میباشد
مثلاً در شکل فوقانی ثابت شد کہ (اط) مساویست با (طع)
وچونکہ (طص) نصف (طع) است
پس (طص) نصف (ط ا) ہم میباشد
یعنی (طص) یک ثلث (اص) است)
بہمین ترتیب ثابت میشود کہ (ط د) یک ثلث (ب د) و (طس)
یک ثلث (س ج) است
ایضاً ازاین عمل منتج ومستفاد میشود
کہ متوسط اقصر ضلع اطول را تنصیف مینماید)
بدانکہ نقطۂ تقاطع خطوط متوسط را مرکز ثقل مثلث گویند)
چنانکہ در دائرہ وکرات نقطہ وسط را مرکز تفسل نامند
زیرا کہ دراین نقطۂ مفیدہ کہ شرح آن کثیراست اجزای اجسام
تعادل دارند)

(۵) ہرگاہ ازرؤس مثلث (مثلث حاد الزوایا) براضلاع مقابل عمائد خارج شوند مشترک النقطہ خواہند بود

فرض کن از رؤس مثلث (ا ب ج) براضلاع مقابل عمائد (ا د) و (ب س)
و (ج ص) خارج شدہ اند)
پس ہر سہ عمائد در یک نقطہ مثلاً (ط) موصول خواہند شد)

وضع شکل = از نقطهٔ (ا) و (ب) و (ج)
خارج کن (ع ق) و (ق ل) و (ل ع) را
که یکدیگر متوازی باشد با اضلاع مقابل
یعنی (ع ل) متوازی باشد با (ا ب) و (ق ل) با (ا ج) و (ق ع) با (ب ج)
پس بحکم ش ۳۴) (ا ب ج ع) متوازی الاضلاع میباشد
زیراکه (ا ب) متوازی (ع ج) است)
ایضاً شکل (ا ب ل ج) متوازی الاضلاع است
زیراکه (ا ب) متوازی (ل ج) است
پس (ل ج) مساوی است با (ج ع)
یعنی (ج) نقطهٔ وسطِ (ل ع) است)
وکذلک (ا) و (ب) نقاط وسط‌اند ضلعین (ع ق) و (ق ل) را)
بنابراین بر اضلاع مثلث (ل ع ق) از نقاط وسط عمائد (ا د) و (ب س) و
(ص ج) خارج شده‌اند (یعنی شکل اول خطوط مشترك النقطه را)
پس در شکلِ مذکوره هر سه عمود بر یك نقطه یعنی (ط) موصول خواهند شد
یعنی از زوایای مثلث (ا ب ج) عمائدیکه بر اضلاع مقابل خارج شده‌اند
در یك نقطه موصول میشوند)
بدانکه در مثلث منفرج الزاویه نقطهٔ راسیه یعنی نقطهٔ مشترکهٔ عمائد بیرون
از شکل واقع میشود یعنی بر اضلاع ممدوده
و در مثلث قائم الزاویه بر نقطهٔ قائمه واقع شود
که یکدیگر دو عمود بر اضلاع منطبق شوند)

تفهیم = هرگاه مبتدی خواسته باشد بهرهٔ از علوم حاصل نماید خاصّه از علم هندسه
لازم است که همّت و شوق خود را معلّم خود قرار دهد — اشکال فرضی بسازد
و متحمل نماید)
زیراکه در هر کاری قائد شوق است که لشکر مقاصد را بمنزل مقصود میرساند

والسّلام علیٰ خیر الانام